القهاب الأستاذ

ملخص القوانين

ملخص قوانين الدالة

■ **الدالـــة :** هى علاقة أو قاعدة رياضية تربط بين متغيرين الأول مستقل (x) والآخر تابع (y) .

ويتم التعبير عنها رياضياً كما يلى : $y = f(x)$

■ تسمى مجموعة القيم التى يأخذها المتغير (x) .

■ تسمى مجموعة القيم التى تعبر عن المتغير (y) والناتجة من التعويض فى الدالة بقيم المتغير (x) .

نطاق أو مجال الدالة	النطاق المرافق أو مدى الدالة

ملحوظة ليست كل علاقة بين (x) و (y) تعتبر دالة ولكن كل دالة علاقة.

وحتى تعتبر العلاقة دالة يجب توافر الشرط التالى :

كل قيمة من قيم (x) تعطى قيمة وحيدة لـ (y)

■ **الـدوال الجبريـة :** هى الدوال القابلة لإجراء العمليات الجبرية على متغيراتها المستقلة ، وتشمل :

١) الدوال كثيرة الحدود . ٢) الدوال القياسية .

٣) الدوال غير القياسية .

■ **الدوال غير الجبرية :** هى الدوال غير القابلة لإجراء العمليات الجبرية على متغيراتها المستقلة ، وتشمل :

١) الدوال الأسية. ٢) الدوال اللوغارتمية .

٣) الدوال المثلثية. ٤) الدوال الزائدية .

■ **الدوال كثيرة الحدود :**

■ تسمى الدالة كثيرة الحدود إذا كانت على الصورة التالية :

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث أن : a_n ، a_2 .... ، a_1 ، a_0 معاملات الدالة

n : عدد صحيح موجب يحدد درجة كثيرة الحدود

ملحوظة درجة كثيرة الحدود تساوى أكبر أس لـ (x)

■ **الدوال القياسية :**

هى دالة على صورة خارج قسمة دالتين كثيرات الحدود .

وتأخذ الشكل التالى : $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث أن : $g(x)$ ، $f(x)$ دوال كثيرة الحدود

■ **الدوال غير القياسية :**

هى دالة على صورة خارج قسمة دالتين أحداهما على الأقل ليست دالة كثيرة الحدود . وتأخذ الشكل التالى :

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث أن :

$g(x)$ ، $f(x)$ أحداهما على الأقل ليست دالة كثيرة الحدود

■ **الدالة الأسية :**

هى دالة يظهر فيها المتغير (x) على شكل أس .

وتأخذ أحد الصور التالية :

$y = a^x$

حيث أن : (a) أساس الدالة ($a \neq 0, 1$)

$y = e^x$

حيث أن : (e) أساس الدالة ($e = 2.718$)

■ **الدالة اللوغاريتمية :** تأخذ أحد الصور التالية :

$y = \log_a x$

حيث أن : ($a \neq 0$)

$y = \ln x$

حيث أن : $\log_e x = \ln x$

■ **الدوال المثلثية :** تأخذ أحد الصور التالية :

1) $y = \sin x$ ⇒ دالة جيب الزاوية

2) $y = \cos x$ ⇒ دالة جيب تمام الزاوية

3) $y = \tan x$ ⇒ دالة ظل الزاوية

■ الدوال الزائدية :

هى دوال فى الدوال الاسية وتأخذ أحد الصور التالية :

$$1)\ y = \text{Sinh } x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$2)\ y = \text{Cosh } x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$3)\ y = \tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

■ الدالة الزوجية و الدالة الفردية

إذا كانت : $y = f(x)$

١) نستبدل (x) بـ $(-x)$ فى الدالة الأصلية .

٢) نقارن بين نتيجة الخطوة السابقة وبين الدالة الأصلية .

■ تكون دالة زوجية عندما : $f(-x) = f(x)$

■ تكون دالة فردية عندما : $f(-x) = -f(x)$

خلاف ما سبق ⇐ الدالة ليست زوجيه ولا فردية

■ الدالة المتزايدة و الدالة المتناقصة

إذا كانت : $y = f(x)$

١) نعوض فى الدالة بقمتين لـ (x) بشرط أن تكون :

قيمة (x_2) ≻ قيمة (x_1)

٢) نقارن بين نتائج الخطوة السابقة.

إذا كان : $f(x_2) \succ f(x_1)$ ■ تكون دالة متزايدة ■

إذا كان : $f(x_2) \prec f(x_1)$ ■ تكون دالة متناقصة ■

■ الدالة الصريحة و الدالة الضمنيه

■ تكون الدالة صريحة إذا أمكن فصل المتغير المستقل (x) عن المتغير التابع (y) .

■ تكون الدالة ضمنية فى حالة عدم إمكانية فصل المتغير المستقل (x) عن المتغير التابع (y) .

تمثيل الدالة بيانياً

١) الدالة من الدرجة الأولى : $y = a_1x + a_0$

■ يمثلها بيانيا خط مستقيم ، حيث أن :

a_0 : يمثل الجزء المقطوع من محور الصادات (Y) .

a_1 : يمثل ميل الخط المستقيم .

إذا كان	إذا كان
$a_0 = 0$	$a_0 \neq 0$
الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل $(0 ، 0)$	الخط المستقيم لا يمر بنقطة الأصل بل يقطع محور الصادات (Y) عند النقطة $(0 ، a_0)$.

إذا كان	إذا كان
$a_1 \prec 0$	$a_1 \succ 0$
ميل الخط المستقيم يكون سالب ويصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (X) .	ميل الخط المستقيم يكون موجب ويصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (X) .

٢) الدالة من الدرجة الثانية :

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

■ يمثلها بيانيا منحنى له رأس وفرعان متماثلان حول خط رأسى قد يكون محور الصادات (Y) أو خط عمودى يوازيه .

إذا كان	إذا كان
$a_2 \prec 0$	$a_2 \succ 0$
المنحنى مفتوح لأسفل ويقع أسفل نقطة الرأس .	المنحنى مفتوح لأعلى ويقع فوق نقطة الرأس .

إذا كان	إذا كان
$a_0 = 0$	$a_0 \neq 0$
المنحنى يمر عند رأسه بنقطة الأصل $(0 ، 0)$	المنحنى لا يمر عند رأسه بنقطة الأصل ولكن يمر بالنقطة $(0 ، a_0)$.

إذا كان	إذا كان
$a_1 = 0$	$a_1 \neq 0$
المنحنى يتماثل حول محور الصادات (Y) .	المنحنى لا يتماثل حول محور الصادات (Y) ولكن يتماثل حول خط يوازى محور الصادات .

٣) الدالة الأسية : $y = e^x$

■ يمثلها بيانيا منحنى يمر بالنقطة (0 , 1) ويلتقى بالمحور (X) عند $(-\infty)$ ، وذلك عندما تكون ($y = 0$) .

٤) الدالة الأسية : $y = e^{-x}$

■ يمثلها بيانيا منحنى يمر بالنقطة (0 , 1) ويلتقى بالمحور (X) عند (∞) ، وذلك عندما تكون ($y = 0$) .

٥) الدالة اللوغاريتمية : $y = \ln x$

■ يمثلها بيانيا منحنى عكس شكل منحنى الدالة الأسية ويمر بالنقطة (1 , 0) .

ملخص قوانين النهايات

■ نهاية الدالة عندما (X) تؤول إلى (a) ■

١) نعوض مباشرة عن (X) فى الدالة المعطاة بقيمة (a).

٢) الناتج هيكون أحد الحالات التالية :

عدد حقيقى	عدد حقيقى / صفر	صفر / صفر
نهاية الدالة	ليس للدالة نهاية	للدالة نهاية

نحصل عليها عن طريق :

■ التخلص من العامل الصفرى $(a - x)$ باستخدام :

١) استخدام قاعدة لوبيتال .

٢) الضرب فى المرافق فى حالة وجود جذر تربيعى.

■ نهاية الدالة عندما (X) تؤول إلى (∞) ■

١) نعوض مباشرة عن (X) فى الدالة المعطاة بـ (∞).

٢) الناتج هيكون أحد الحالات التالية :

صفر	∞	$\frac{\infty}{\infty}$
نهاية الدالة	ليس للدالة نهاية	للدالة نهاية

نحصل عليها عن طريق :

١) استخدام قاعدة لوبيتال .

٢) قسمة البسط والمقام على (X) مرفوعة لأكبر أس .

■ مع ملاحظة أن :

1) $x = \sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[4]{x^4} = \dots$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{عدد}}{x} = 0$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{عدد}}{x^n} = 0$

■ ركز معايا شوية :

١) (أى حاجة)$^{\infty}$ = ∞ ٢) (أى حاجة)$^{-\infty}$ = صفر

ملاحظات

١) إذا كانت دالة البسط من درجة أقل من دالة المقام ، فأن نهاية الدالة = صفر .

٢) إذا كانت دالة البسط من درجة أكبر من دالة المقام ، فأن نهاية الدالة = ∞ .

■ استمرار أو اتصال الدالة ■

الدالة بقاعدة واحدة	الدالة بقاعدتين
١) نوجد قيمة الدالة $F(x)$ عند النقطة المطلوبة (a) للتأكد من أن الدالة معرفة عند هذه النقطة .	١) نوجد النهاية اليمنى للدالة عند $(x \succ a)$.
٢) نوجد نهاية الدالة عند نفس النقطة .	٢) نوجد النهاية اليسرى للدالة عند $(x \prec a)$.
٣) الدالة مستمرة إذا كانت : قيمة الدالة = نهاية الدالة	٣) الدالة مستمرة إذا كانت : النهاية اليمنى للدالة = النهاية اليسرى للدالة

ملاحظات

١) الدوال كثيرة الحدود مستمرة دائما عند أى نقطة .

٢) الدوال الكسرية غير مستمرة دائما عند مجموعة أصفار المقام ، لان عند هذه النقط تكون الدالة غير معرفة .

قوانين التفاضل

■ إيجاد المشتقة الأولى بالمبادئ الأولية

١) نعوض عن كل (X) ⇐ بـ $(X + \Delta X)$

٢) نوجد (Δy) حيث أن :

$$\Delta y = \underbrace{f(X + \Delta X)}_{\text{ناتج الخطوة (١)}} - \underbrace{f(X)}_{\text{الدالة المعطاه}}$$

٣) نوجد $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ بقسمة طرفى المعادلة على (ΔX) .

٤) نوجد $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ حيث أن :

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{نهاية ناتج الخطوة (٣)}}$$

■ إيجاد المشتقة الأولى بقواعد التفاضل

قاعدة (١) : تفاضل الثابت

$y = a$ (ثابت) ⇒ $\frac{dy}{dx} =$ صفر

قاعدة (٢) : تفاضل (X)

$y = X$ ⇒ $\frac{dy}{dx} = 1$

قاعدة (٣) : تفاضل (aX)

$y = aX$ ⇒ $\frac{dy}{dx} = a$

قاعدة (٤) : تفاضل (X^n)

$y = X^n$ ⇒ $\frac{dy}{dx} = n X^{n-1}$

قاعدة (٥) : تفاضل $(a X^n)$

$y = aX^n$ ⇒ $\frac{dy}{dx} = a(n) X^{n-1}$

قاعدة (٦) : تفاضل القوس

$y =$ (دالة)^n

$\frac{dy}{dx} = n$ (الدالة)$^{n-1}$ × تفاضل ما بداخل القوس

قاعدة (٧) : تفاضل الدالة الأسية بالاساس (e)

$y = e^{(\text{دالة})}$

$\frac{dy}{dx} = e^{(\text{دالة})}$ × تفاضل الأس × $\text{Ln } e$

قاعدة (٨) : تفاضل الدالة الأسية بالاساس (a)

$y = a^{(\text{دالة})}$

$\frac{dy}{dx} = a^{(\text{دالة})}$ × تفاضل الأس × $\text{Ln } a$

قاعدة (٩) : تفاضل الدالة اللوغاريتميه بالأساس (e)

$y = \text{Log}_e$ (دالة) $= \text{Ln}$ (دالة)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{تفاضل الدالة بدون الوغاريتم}}{\text{الدالة كما هى بدون اللوغاريتم}}$

قاعدة (١٠) : تفاضل الدالة اللوغاريتميه بالأساس (a)

$y = \text{Log}_a$ (دالة)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{تفاضل الدالة بدون الوغاريتم}}{\text{الدالة كما هى بدون اللوغاريتم}} \times \frac{1}{\text{Ln } a}$

قاعدة (١١) : تفاضل الدالة المثلثية (Sin)

$y = \text{Sin}$ (دالة)

$\frac{dy}{dx} =$ تفاضل الدالة × Cos (دالة)

قاعدة (١٢) : تفاضل الدالة المثلثية (Cos)

$y = \text{Cos}$ (دالة)

$\frac{dy}{dx} = -$ تفاضل الدالة × Sin (دالة)

ثوابت

1) $y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

2) $y = \text{Ln}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

3) $y = \text{Sin}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \text{Cos}(x)$

4) $y = \text{Cos}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{Sin}(x)$

قاعدة (١٣) : تفاضل حاصل ضرب دالتين

حاصل ضرب دالتين = y

$\frac{dy}{dx}$ = تفاضل الأولى × الثانية + تفاضل الثانية × الأولى

قاعدة (١٤) : تفاضل خارج قسمة دالتين

خارج قسمة دالتين = y

$\frac{dy}{dx} = \frac{[\text{تفاضل المقام} \times \text{البسط}] - [\text{تفاضل البسط} \times \text{المقام}]}{\text{مربع المقام}}$

قاعدة (١٥) : تفاضل الدالة الضمنية

■ **الدالة الضمنية** : يصعب فيها الفصل بين المتغيرين (y) و (x).

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ } (x)}{\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ } (y)}$

قاعدة (١٦) : تفاضل دالة الدالة

إذا كانت : $u = f(v)$ $\quad$ $y = f(u)$

■ فيكون تفاضل (y) بالنسبة إلى (u) $\Leftarrow \frac{dy}{du}$

■ فيكون تفاضل (u) بالنسبة إلى (x) $\Leftarrow \frac{du}{dx}$

فيكون تفاضل (y) بالنسبة إلى (x)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

■ بحث تزايد وتناقص الدالة ■

١) نوجد المشتقة التفاضلية الأولى للدالة $\frac{dy}{dx}$.

٢) نضع المشتقة التفاضلية الأولى $\frac{dy}{dx}$ = صفر .

↲ [لتحديد النقط الحرجة للمتغير (x)] .

٣) تحديد الفترات المختلفة بين النقاط الحرجة .

٤) تحديد فترات تزايد وتناقص الدالة عن طريق بحث إشارة المشتقة فى هذه الفترات ، باختيار نقاط تنتمى لتلك الفترات والتعويض بها فى المشتقة الأولى . فإذا كان :

$\frac{dy}{dx} \succ 0$	$\frac{dy}{dx} \prec 0$
تكون الدالة متزايدة	تكون الدالة متناقصة

■ إيجاد النهاية العظمى والصغرى للدالة ■

١) نوجد المشتقة التفاضلية الأولى للدالة $\frac{dy}{dx}$.

٢) نضع المشتقة التفاضلية الأولى $\frac{dy}{dx}$ = صفر .

↲ [لتحديد النقط الحرجة للمتغير (x)] .

٣) نوجد المشتقة التفاضلية الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$.

٤) نعوض بالنقط الحرجة فى المشتقة الثانية . فإذا كان :

ناتج التعويض $\prec$ الصفر	ناتج التعويض $\succ$ الصفر
نقطة نهاية صغرى	نقطة نهاية عظمى

ناتج التعويض = الصفر

ليست نقطة نهاية صغرى أو نهاية عظمى

ملحوظة :

١) الدالة الخطية تكون متزايدة دائما إذا كان معامل (x) موجب .

٢) الدالة الخطية تكون متناقصة دائما إذا كان معامل (x) سالب .

٣) الدالة الخطية ليست لها نقط عظمى أو صغرى

قوانين التكامل

■ قواعد التكامل ■

تكامل الدالة	الدالة
$= ax + k$	1) $\int a$
$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	2) $\int x^n$
$= a\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	3) $\int a x^n$
$= \frac{(ax \pm b)^{n+1}}{a(n+1)} + k$	4) $\int (ax \pm b)^n$

بشرط أن تكون الدالة فى القوس من الدرجة الأولى

$= \frac{e^{(ax \pm b)}}{a} + k$	6) $\int e^{(ax \pm b)}$

بشرط أن تكون الدالة فى الأس من الدرجة الأولى

$= \frac{A^{(ax \pm b)}}{a \,\mathrm{Ln}\, A} + k$	8) $\int A^{(ax \pm b)}$

بشرط أن تكون الدالة فى الأس من الدرجة الأولى

$= \frac{1}{a}\mathrm{Ln}\,(ax \pm b) + k$	10) $\int \frac{1}{ax \pm b}$

بشرط أن تكون الدالة فى المقام من الدرجة الأولى

$= \mathrm{Ln}\,(\text{المقام}) + k$	11) $\int \frac{\text{البسط تفاضل المقام}}{\text{المقام}}$
$= \frac{1}{\text{تفاضل الدالة}} \cdot \mathrm{Sin}(\text{دالة}) + k$	9) $\int \mathrm{Cos}\,(\text{دالة})$
$= \frac{-1}{\text{تفاضل الدالة}} \cdot \mathrm{Cos}\,(\text{دالة}) + k$	10) $\int \mathrm{Sin}\,(\text{دالة})$

بشرط أن تكون الدالة من الدرجة الأولى

ثوابت

1) $\int e^x = e^x + k$

2) $\int \frac{1}{x} = \mathrm{Ln}\,(x) + k$

3) $\int \mathrm{Cos}\,(x) = \mathrm{Sin}\,(x) + k$

4) $\int \mathrm{Sin}\,(x) = -\mathrm{Cos}\,(x) + k$

ملاحظات

١) تكامل مجموع أو طرح مجموعة من الدوال

= مجموع أو طرح تكاملات هذه الدوال

٢) لا توجد قاعدة محددة لتكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمة دالتين ، ولكن :

■ فى تكامل حاصل ضرب دالتين نحاول فك الأقواس أو ضرب الدوال فى بعضها (أن أمكن) .

■ فى تكامل خارج قسمة دالتين نحاول تبسيط البسط أو المقام أو الاثنين باستخدام التحليل (أن أمكن) .

■ طرق التكامل ■

١) **التكامل بالتجزئ** : يستخدم فى الحالة التالية :

$$\int x^n \ln(x) \,.\, dx$$

خطوات الحل باستخدام التكامل بالتجزئ

١) نفرض أن :

الدالة الأولى = $\ln(x)$

الدالة الثانية = x^n

$\ln(x)$	
	x^n

⇐ نكامل ⇐ نفاضل ⇐

٢) نطبق قاعدة التكامل بالتجزئ كما يلى :

$$\int \text{دالة} \times \text{دالة} = \text{الأولى كما هى} \times \text{تكامل الثانية} - \int \text{تكامل الثانية} \times \text{تفاضل الأولى}$$

٢) **التكامل بالجدول** : يستخدم فى الحالة التالية :

$$\int x^n e^x \,.\, dx$$

خطوات الحل باستخدام التكامل بالجداول

نكامل ⇓ نفاضل ⇓

الدالة الثانية	الدالة الاولى	الاشارة
e^x	x^n	+
ونقوم بايجاد تكاملها عدة مرات ونتوقف عندما تصبح المشتقة المقابلة = صفر .	ونقوم باشتقاقها عدة مرات ونتوقف عندما تصبح المشتقة = صفر .	-
		+

٣) التكامل بالتعويض : يستخدم فى الحالات التالية :

✍ يستخدم التكامل بالتعويض فى الحالات التالية :

الحالة الأولى : إذا كان التكامل على الصورة التالية :

$$\int (\text{دالة})^{n} \ . \ dx$$ (تفاضل الدالة أو قريب منه)

تفاضل الدالة بداخل القوس يحتوى على (X)

الحالة الثانية : إذا كان التكامل على الصورة التالية :

$$\int e^{(\text{الدالة})} \ . \ dx$$ (تفاضل الأس أو قريب منه)

تفاضل الأس يحتوى على (X)

الحالة الثالثة : إذا كان التكامل على الصورة التالية :

$$\int (\text{دالة}) \ . \ dx$$ (تفاضل الدالة أو قريب منه)

sin
cos

تفاضل الدالة بعد sin أو cos يحتوى على (X)

✍ **خطوات الحل بالتكامل بالتعويض :**

١) نفرض أن :

الحالة الأولى	الدالة الموجودة فى القوس بدون أس = y
الحالة الثانية	الدالة الموجودة فى الأس = y
الحالة الثالثة	الدالة بعد sin أو cos = y

٢) نوجد $\frac{dy}{dx}$ (تفاضل الـ y بالنسبة لـ x) .

ومنها يكون : $dx = \frac{dy}{\text{ناتج التفاضل}}$

٣) نعوض فى التكامل المعطى عن كلا من (y) و (dx).

٤) نكامل عادى بالنسبة لـ (y) .

---

٤) التكامل بالكسور الجزئية :

✍ يستخدم فى تكامل الدوال التى على صورة بسط و مقام ، ليس على صورة من الصور السابقة .

نوضح أكثر من خلال التمارين

٣) التكامل المحدود :

نكامل عادى $\Rightarrow \int_{\text{حد أدنى}}^{\text{حد أعلى}} f(x) \ . \ dx$

■ بعد منكامل هنعوض مرة بـ (الحد الأعلى) ، ونعوض مرة تانية بـ (الحد الأدنى) والفرق بينهما هو ناتج التكامل .

التفاضل الجزئى

■ يعتبر تكملة لتفاضل الدوال الضمنية ولا يطبق إلا إذا كانت الدالة فى أكثر من متغير .

إذا كانت الدالة : $y = f(x, u)$

■ فتكون المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (X) :

نفاضل الدالة بالنسبة لـ (X) مع اعتبار (u) ثابت $= \frac{\partial y}{\partial x}$

■ وتكون المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (u) :

نفاضل الدالة بالنسبة لـ (u) مع اعتبار (X) ثابت $= \frac{\partial y}{\partial u}$

■ وتكون المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ (X) مع اعتبار } (u) \text{ ثابت} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ } (u) \text{ مع اعتبار (X) ثابت} \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ } (u) \text{ مع اعتبار (X) ثابت} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ (X) مع اعتبار } (u) \text{ ثابت} \end{cases}$$

قوانين المصفوفات والمحددات

■ المصفوفة :

هى مجموعة من العناصر (أعداد أو رموز) مرتبة فى شكل صفوف عددها (m) وأعمدة عددها (n) موضوعة بين قوسان على الصورة [ ] ، ويرمز لها بأحد الحروف الابجدية .

ولا يشترط أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة

ملاحظات :

١) إذا كان عدد الصفوف = عدد الأعمدة .

فأن المصفوفة تسمى مصفوفة مربعة .

٢) إذا كان عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة .

فأن المصفوفة تسمى مصفوفة مستطيلة .

٣) إذا كان عدد الصفوف = 1 .

فأن المصفوفة تسمى متجه صفى (أو أفقى) .

٤) إذا كان عدد الأعمدة = 1 .

فأن المصفوفة تسمى متجه عمودى (أو رأسى) .

٥) إذا كان عدد الصفوف = عدد الأعمدة = 1 .

فأن المصفوفة تسمى مصفوفة العنصر الواحد .

■ بعض أشكال المصفوفات :

١) المصفوفة الصفرية : هى مصفوفة كل عناصرها أصفار قد تكون مربعة أو مستطيلة ويرمز لها بالرمز (0) .

٢) المصفوفة القطرية : مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار فيما عدا عناصر القطر الرئيسى تأخذ قيم ≠ صفر .

٣) مصفوفة الوحدة (I) : هى مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى = (1) .

٤) المصفوفة المثلثية :

المصفوفة المثلثية العليا

■ هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أسفل القطر الرئيسى أصفار .

■ وبالتالى فأن العناصر غير الصفرية تكون على شكل مثلث يقع فى أعلى المصفوفة .

المصفوفة المثلثية السفلى

■ هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أعلى القطر الرئيسى أصفار .

■ وبالتالى فأن العناصر غير الصفرية تكون على شكل مثلث يقع أسفل المصفوفة .

٥) معكوس أو منقول أو مبدول المصفوفة ($A^{\backprime}$) (A^{T}) :

نحصل عليها بتحويل صفوف المصفوفة (A) إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف .

٦) المصفوفة المتماثلة :

■ يقال أن المصفوفة (A) متماثلة إذا كان :

$$A^{\backprime} = A$$

■ يقال أن المصفوفة (A) متماثلة بالتواء إذا كان :

$$A^{\backprime} = -A$$

■ العمليات الحسابية على المصفوفات :

■ الجمع والطرح :

يمكن جمع أو طرح المصفوفات بشرط أن تكون المصفوفات من نفس الدرجة أو لها نفس الابعاد .

ويتم ذلك عن طريق جمع أو طرح العناصر المتناظرة فى كل من المصفوفتين ويكون ناتج الجمع أو الطرح مصفوفة جديدة لها نفس درجة .

■ ضرب المصفوفة فى عدد :

يمكن ضرب المصفوفة فى عدد عن طريق ضرب هذا العدد فى كل عنصر من عناصر المصفوفة .

■ ضرب مصفوفة فى مصفوفة :

يمكن ضرب المصفوفة فى مصفوفة أخرى بشرط أن يكون :

عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

■ وحتى تتم عملية الضرب نقوم بتقسيم المصفوفة الأولى لصفوف وتقسيم المصفوفة الثانية إلى أعمدة ثم نقوم بضرب عناصر كل صف فى المصفوفة الأولى فى عناصر كل عمود فى المصفوفة الثانية .

■ مقلوب المصفوفة (A^{-1}) :

لكى يكون للمصفوفة (A) مقلوب يجب توافر شرطيين هما :

١) أن تكون المصفوفة (A) مصفوفة مربعة .

٢) أن تكون قيمة محدد المصفوفة |A| ≠ صفر.

■ طريقة ايجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} :

طريقة المصفوفة المرافقة — طريقة العمليات الأولية

١) طريقة المصفوفة المرافقة

■ لإيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نتبع الخطوات التالية :

١) نوجد قيمة محدد المصفوفة | |.

٢) إيجاد المصفوفة المرافقة $g(A)$ كما يلي :

■ نوجد منقول المصفوفة $(A^{\backslash})$.

■ نوجد (d_{rs}) لكل عنصر من عناصر المصفوفة $(A^{\backslash})$.

■ نوجد (sh_{rs}) لكل عنصر من عناصر المصفوفة $(A^{\backslash})$.

■ نوجد المصفوفة $g(A)$ التى تحتوى على العناصر (sh_{rs}) .

٣) نوجد مقلوب المصفوفة A^{-1} كما يلي :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times g(A)}$$

٢) طريقة العمليات الأولية

■ لإيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نتبع الخطوات التالية :

١) نقوم بكتابة المصفوفة (A) ومصفوفة الوحدة (I) فى مصفوفة واحدة جديدة بالشكل التالي :

$$[\,A \mid I\,]$$

٢) تحويل المصفوفة (A) إلى مصفوفة الوحدة (I) كما يلي :

■ يتم تحويل أى رقم إلى واحد صحيح بضرب أرقام الصف الموجود به هذا الرقم فى $\left(\frac{1}{\text{الرقم}}\right)$.

■ يتم تحويل أى رقم إلى صفر بضرب أرقام الصف الذى سبق تحويل الرقم فيه إلى واحد صحيح فى نفس الرقم المراد تحويله إلى صفر بإشارة مخالفة وجمع كل رقم من أرقام هذا الصف على الارقام المقابلة لها فى الصف المراد تحويل فيه الرقم إلى صفر .

■ **المحـــــدد :**

هو قيمة حقيقية يمكن استنتاجها بأستخدام قواعد معينة على المصفوفات المربعة التى تتكون من مجموعة عناصر مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة موضوعة بين خطين رأسيين متوازيين | | .

ويشترط أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة

■ **إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الأولى :**

فأن :	إذا كانت :
$\lvert A\rvert = \lvert a_{11}\rvert = a_{11}$	$A = [a_{11}]$

■ **إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية :**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

■ **إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة :**

طريقة سارس (الاقطار المتوازية)

١) نعيد كتابة المحدد مع إضافة العمودين الأول والثانى على يمين المحدد الأصلى .

٢) تحديد الأقطار الرئيسية (وهى ثلاثة أقطار تبدأ من أقصى اليسار أعلى إلى أقصى اليمين أسفل) وكذلك تحديد الأقطار الثانوية (وهى ثلاثة أقطار تبدأ من أقصى اليمين أعلى إلى أقصى اليسار أسفل) .

مع مراعاة أن كل قطر يحتوى على ثلاثة عناصر ..

٣) نوجد حاصل ضرب عناصر كل قطر من الاقطار الرئيسية والاقطار الثانوية .

٤) حساب قيمة المحدد كمايلى :

قيمة المحدد	=	مجموع حواصل ضرب عناصر كل قطر من (الاقطار الرئيسية)	-	مجموع حواصل ضرب عناصر كل قطر من (الاقطار الثانوية)

طريقة كرامر

١) نختار أحد الصفوف (أو الأعمدة) ، ويفضل استخدام الصف أو العمود الذى يحتوى على اكبر عدد من الاصفار لتبسيط عملية الحساب .

القاضى 012 81 81 46 47 القاضى 010 65 60 14 70

٢) نوجد قيمة العنصر المشارك لكل عنصر من عناصر الصف أو العمود المختار ، حيث أن :

$$sh_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot d_{rs}$$

■ **خد بالك** : d_{rs} هو محيدد العنصر الناتج بعد حذف الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر .

٣) حساب قيمة المحدد كمايلى :

قيمة المحدد = مجموع حواصل ضرب عناصر الصف (أو العمود) المختار فى العناصر المشتركة لتلك العناصر .

■ خصائص المحددات :

١) إذا أحتوى المحدد على صف أو عمود كل عناصره أصفار ، فأن قيمة هذا المحدد تساوى صفر .

٢) إذا أحتوى المحدد على صفين (أو عمودين) عناصرهما متساويان فأن قيمة هذا المحدد تساوى صفر .

٣) إذا أحتوى المحدد على صفين (أو عمودين) عناصرهما متناسبان فأن قيمة هذا المحدد تساوى صفر .

٤) إذا تم تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود فأن قيمة المحدد لا تتغير ولكن تتغير الاشارة .

٥) قيمة المحدد لا تتغير ، إذا تم إيجاد منقوله أى حولت صفوفه إلى أعمدة أو أعمدته إلى صفوف .

٦) قيمة المحدد لا تتغير ، إذا تم ضرب صف أو عمود فى مقدار ثابت وإضافة الناتج إلى صف أو عمود أخر .

٧) قيمة محدد المصفوفة القطرية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى .

٨) قيمة محدد المصفوفة المثلثية العليا أو السفلى يساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى .

■ حل المعادلات بأستخدام المحددات :

١) نكون محدد المعاملات ، ثم نوجد قيمته (Δ) .

٢) نكون محدد المتغير (X) بعد حذف عمود المتغير (X) من محدد المعاملات واستبداله بالحدود المطلقة ، ثم نوجد قيمته (ΔX) .

٣) نكون محدد المتغير (Y) بعد حذف عمود المتغير (Y) من محدد المعاملات واستبداله بالحدود المطلقة ، ثم نوجد قيمته (ΔY) .

٤) نكون محدد المتغير (Z) (أن وجد) بعد حذف عمود المتغير (Z) من محدد المعاملات واستبداله بالحدود المطلقة ، ثم نوجد قيمته (ΔZ) .

٤) نوجد قيمة كلا من (X) و (Y) و (Z) كما يلى :

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta} \quad , \quad Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} \quad , \quad Z = \frac{\Delta Z}{\Delta}$$

■ حل المعادلات بأستخدام المصفوفات :

طريقة العمليات الأولية — طريقة المصفوفة المرافقة

١) طريقة المصفوفة المرافقة

* **خطوات الحل :**

١) وضع المعادلات على الصورة التالية :

$$AX = K$$

حيث أن : A : هى مصفوفة المعاملات .

X : هى مصفوفة المجاهيل (المتغيرات) .

K : هى مصفوفة الحدود المطلقة .

٢) إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نتبع الخطوات التالية :

١] نوجد قيمة محدد المصفوفة | |.

٢] إيجاد المصفوفة المرافقة g(A) كما سبق .

٣] نوجد مقلوب المصفوفة A^{-1} كما سبق .

٣) نوجد قيمة المجاهيل عن طريق ضرب مقلوب مصفوفة المعاملات A^{-1} فى مصفوفة الحدود المطلقة (K) كما يلى :

$$X = A^{-1}K$$

ملحوظة

■ قبل البدء فى الحل يجب التأكد من أن المتغيرات فى طرف والحدود المطلقة (الثوابت) فى الطرف الاخر .

٢) طريقة العمليات الأولية

خطوات الحل :

١) نقوم بكتابة مصفوفة المعاملات (A) ومصفوفة الحدود المطلقة (K) فى مصفوفة واحدة جديدة بالشكل التالى :

$$[\ A \mid K\ ]$$

٢) تحويل المصفوفة (A) إلى مصفوفة الوحدة (I) فتتحول المصفوفة (K) إلى مجموعة الحل ، كما يلى :

■ يتم تحويل أى رقم إلى واحد صحيح بضرب أرقام الصف الموجود به هذا الرقم فى ($\frac{1}{\text{الرقم}}$) .

■ يتم تحويل أى رقم إلى صفر بضرب أرقام الصف الذى سبق تحويل الرقم فيه إلى واحد صحيح فى نفس الرقم المراد تحويله إلى صفر بإشارة مخالفة وجمع كل رقم من أرقام هذا الصف على الارقام المقابلة لها فى الصف المراد تحويل فيه الرقم إلى صفر .

■ خواص معكوس المصفوفة: A^{-1} أو A^T

1] $(A^T)^T = A$ ‖ 2] $(kA)^T = k.A^T$

3] $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

4] $(AB)^T = B^T \times A^T$

■ معكوس المتجه الصفى هو متجه عمودى والعكس معكوس المتجه العمودى هو متجه صفى .

■ معكوس المصفوفة المثلثية العليا هو مصفوفة مثلثية سفلى والعكس معكوس المصفوفة المثلثية السفلى هو مصفوفة مثلثية عليا .

■ معكوس المصفوفة المتماثلة يساوى المصفوفة الأصلية .

■ خواص مقلوب المصفوفة: A^{-1}

1] $(A^{-1})^{-1} = A$ ‖ 2] $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \times A^{-1}$

3] $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$

4] $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

■ ملاحظات على محدد المصفوفة $(n \times n)$:

n : درجة المصفوفة ‖ k : عدد ثابت

1] $|A^T| = |A|$ ‖ 2) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

3] $|kA| = k^n \times |A|$

4] $|kA^T| = k^n \times |A^T| = k^n \times |A|$

5] $|kA^{-1}| = k^n \times |A^{-1}| = k^n \times \frac{1}{|A|}$

6] $|(kA)^T| = k^n \times |A^T| = k^n \times |A|$

7] $|(kA)^{-1}| = \frac{1}{k^n} \times |A^{-1}| = \frac{1}{k^n} \times \frac{1}{|A|}$

8] $|A \times B| = |A| \times |B| = |B| \times |A|$

9] $|(AB)^T| = |B^T| \times |A^T| = |B| \times |A|$

10] $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}| \times |A^{-1}| = \frac{1}{|B|} \times \frac{1}{|A|}$

■ خواص العمليات الجبرية على المصفوفات :

1] $A + B = B + A$

2] $A - B \neq B - A$

3] $A \times B \neq B \times A$

4] $A + (B + C) = (A + B) + C$

5] $A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C)$

6] $(B \pm C) \times A = (B \times A) \pm (C \times A)$

7] $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

8] $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$