الفصل الأول : الدالـــة

ثانياً : نهاية الدالة

■ **نهايـة الدالـة :** هى القيمة التى يقترب منها أو يأخذها المتغير التابع (y) عندما يقترب المتغير المستقل (x) من قيمة معينة ولتكن (a) ويرمز لها بالرمز (Lim).

■ **ونتناول هنا :**

١) نهاية الدالة عندما (x) تؤول إلى (a).

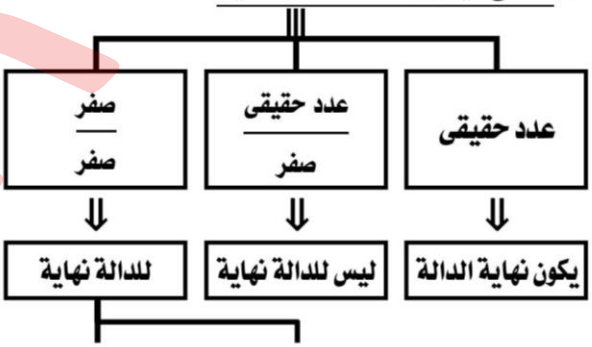
٢) نهاية الدالة عندما (x) تؤول إلى (∞).

١) نهاية الدالة عندما (x) تؤول إلى (a)

خطوات الحل :

١) نعوض مباشرة عن (x) فى الدالة المعطاة بقيمة (a).

٢) الناتج هيكون أحد الحالات التالية :



نحصل عليها عن طريق :

■ **التخلص من العامل الصفرى ($x - a$) باستخدام:**

١) استخراج عامل مشترك من البسط أو من المقام أو كليهما.

٢) توحيد مقامات فى البسط أو المقام . ٣) فك اقواس .

٤) تحليل البسط أو المقام أو الاثنين معاً.

٥) فى حالة صعوبة التحليل نستخدم القسمة المطولة .

٦) الضرب فى المرافق فى حالة وجود جذر تربيعى.

٧) استخدام النظريات (1) ، (2).

أو بأستخدام قاعدة لوبيتال

تذكر قواعد تحليل المقادير الجبرية

استخراج العامل المشترك ⇐ (أن وجد)

مثال (١) : $5x^2 - 2x = x\,(5x - 2)$

مثال (٢) : $6x^3 - 9x^2 = 3x^2\,(2x - 3)$

تحليل الفرق بين مربعين

مثال (١) : $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$
(الفرق بينهم) (مجموعهم)

مثال (٢) : $x^2 - 9 = (x - 3)\,(x + 3)$
(الفرق بينهم) (مجموعهم)

تحليل مجموع مكعبين

مثال (١) : $x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 - xy + y^2)$
(مجموعهم) .....

مثال (٢) : $x^3 + 8 = (x + 2)\,(x^2 - 2x + 4)$
(مجموعهم) .....

تحليل الفرق بين مكعبين

مثال (١) : $x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$
(الفرق بينهم) .....

مثال (٢) : $x^3 - 8 = (x - 2)\,(x^2 + 2x + 4)$
(الفرق بينهم) .....

تحليل المقدار الثلاثى

مثال (١) : $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\,(x - 3)$

بينما

$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)\,(x + 1)$

مثال (٢) : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)\,(x + 3)$

بينما

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)\,(x - 3)$

مثال (٣) : $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)\,(x - 2)$

بينما

$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)\,(x + 2)$

CARVEN

ملحوظة عند تحليل المقدار الثلاثى لازم نجيب

عددين حاصل ضربهم = الحد الأخير بإشارته

مع مراعاة الآتى :

⇐ لو الحد الأخير إشارته (+) نجيب عددين إشارتهما أم موجبان أو سالبان حسب إشارة الحد الأوسط.

⇐ لو الحد الأخير إشارته (-) نجيب عددين إشارتهما مختلفة ، ونعطى العدد الأكبر إشارة الحد الأوسط .

⇐ التأكد أن حاصل ضرب الوسطين = الحد الأوسط بإشارته

فك الاقواس

مثال: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

بينما

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

القسمة المطولة

فى حالة صعوبة التحليل نستخدم القسمة المطولة

مثال : $(2x^3 + 5x^2 - x - 6) \div (x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 7x + 6 \\ \hline (x-1) & 2x^3 + 5x^2 - x - 6 \\ & 2x^3 - 2x^2 \\ \hline & 7x^2 - x - 6 \\ & 7x^2 - 7x \\ \hline & 6x - 6 \\ & 6x - 6 \\ \hline & \text{------} \end{array}$$

الضرب فى المرافق

يستخدم فى حالة الجذور التربيعية فقط!!!! .

قاعدة لوبيتال | **هام جدا جدا**

إذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

فإن $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

ثم نعوض مباشرة فى مشتقة البسط ومشتقة المقام .

* نستمر بنفس الاسلوب حتى نحصل على نهاية للدالة .

تمرين (١) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 3} x^2 - 3x + 7$

2) $\lim_{x\to 2} x^2 - 4$

3) $\lim_{x\to 4} x^3 + 2$

5) $\lim_{x\to 2} x^3 - 2x + 8$

4) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+5}{x-2}$

حل تمرين (١)

1) $\lim_{x\to 3} x^2 - 3x + 7 = (3)^2 - (3)(3) + 7 = 7$

2) $\lim_{x\to 2} x^2 - 4 = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

3) $\lim_{x\to 4} x^3 + 2 = (4)^3 + 2 = 64 + 2 = 66$

4) $\lim_{x\to 2} x^3 - 2x + 8 = (2)^3 - 2(2) + 8 = 12$

5) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{(1)^2+2}{1+2} = \frac{3}{2} = 1.5$

6) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+5}{x-2} = \frac{(2)^2-2(2)+5}{2-2} = \frac{5}{0}$ ليس للدالة نهاية

تمرين (٢) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

2) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

3) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

4) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}$

5) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^3-1}$

6) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-x-10}{x^3-4x}$

حل تمرين (٢)

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x-1)

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

$= \lim_{x\to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$

2) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(5)^2-25}{5-5} = \frac{0}{0}$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x-5)

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)}$$

$$=\lim_{x\to 5} x+5=5+5=10$$

3) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\frac{(-2)^2-4}{(-2)^2+3(-2)+2}=\frac{0}{0}$$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x+2)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)}{(x+1)}=\frac{-2-2}{-2+1}=\frac{-4}{-1}=4$$

4) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^2-2(-2)-8}{(-2)^2+(-2)-2}=\frac{0}{0}$$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x+2)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)}{(x-1)}=\frac{-2-4}{-2-1}=\frac{-6}{-3}=2$$

5) $$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x^3-1}=\frac{5(1)^2-4(1)-1}{(1)^3-1}=\frac{0}{0}$$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x-1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(5x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(5x+1)}{(x^2+x+1)}=\frac{5(1)+1}{(1)^2+1+1}=\frac{6}{3}=2$$

6) $$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^3-4x}=\frac{3(2)^2-2-10}{(2)^3-4(2)}=\frac{0}{0}$$

نستخرج عامل مشترك من المقام

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-1}{x(x^2-4)}$$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x-2)

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+5)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+5)}{x(x+2)}=\frac{3(2)+5}{2(2+2)}=\frac{11}{8}=1.375$$

حل تمرين (٢) باستخدام قاعدة لوبيتال

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(1)^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=\frac{2(1)}{1}=2$$

2) $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{(5)^2-25}{5-5}=\frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x}{1}=\frac{2(5)}{1}=10$$

3) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\frac{(-2)^2-4}{(-2)^2+3(-2)+2}=\frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x}{2x+3}=\frac{2(-2)}{2(-2)+3}=\frac{-4}{-1}=4$$

4) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^2-2(-2)-8}{(-2)^2+(-2)-2}=\frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{2x-2}{2x+1} = \frac{2(-2)-2}{2(-2)+1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

5) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^3-1} = \frac{5(1)^2-4(1)-1}{(1)^3-1} = \frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10x-4}{3x^2} = \frac{10(1)-4}{3(1)^2} = \frac{6}{3} = 2$$

6) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-x-10}{x^3-4x} = \frac{3(2)^2-2-10}{(2)^3-4(2)} = \frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-x-10}{x^3-4x} = \lim_{x\to 2} \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{6x-1}{3x^2-4} = \frac{6(2)-1}{3(2)^2-4} = \frac{11}{8} = 1.375$$

تمرين (٣) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{x^2-4x}$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2-9}$

3) $\lim_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^2+x-6}$

4) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+7x+12}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+5)^2-25}{x}$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x-1)^2-1}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^2+3x-1}{x^2+7x}$

8) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+|x-2|-4}{x^2+2x-3}$

حل تمرين (٣)

1) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{x^2-4x} = \frac{(4)^3-16(4)}{(4)^2-4(4)} = \frac{0}{0}$

نأخذ عامل مشترك من البسط و المقام للتخلص من العامل الصفرى

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \frac{x(x^2-16)}{x(x-4)}$$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x-4)

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 4} x+4 = 4+4 = 8$$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2-9} = \frac{2(3)^2-3(3)-9}{(3)^2-9} = \frac{0}{0}$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x-3)

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x+3)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(2x+3)}{(x+3)} = \frac{2(3)+3}{3+3} = \frac{9}{6} = 1.5$$

3) $\lim_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^2+x-6} = \frac{(-3)^4-81}{(-3)^3+(-3)-6} = \frac{0}{0}$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x+3)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^2+x-6} = \lim_{x\to -3} \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x-2)}$$

$$= \frac{(-3-3)((-3)^2+9)}{-3-2} = \frac{-108}{-5} = 21.6$$

4) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+7x+12} = \frac{(-3)^3-27}{(-3)^2+7(-3)+12} = \frac{0}{0}$

نستخدم التحليل للتخلص من العامل الصفرى (x+3)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+7x+12} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+4)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x^2-3x+9}{x+4} = \frac{(-3)^2-3(-3)+9}{-3+4} = 27$$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+5)^2-25}{x} = \frac{(0+5)^2-25}{0} = \frac{0}{0}$

نفك الاقواس فى البسط

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+10x+25-25}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+10x}{x}$$

نأخذ عامل مشترك من البسط للتخلص من العامل الصفرى (x)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+10x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+10)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x+10 = 0+10 = 10$$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x-1)^2-1} = \frac{0}{(0-1)^2-1} = \frac{0}{0}$

نفك الاقواس فى المقام

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-2x+1-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-2x}$$

نأخذ عامل مشترك من المقام للتخلص من العامل الصفرى (x)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0-2} = \frac{1}{-2} = -0.5$$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^2+3x-1}{x^2+7x} = \frac{0}{0}$

نفك الاقواس فى البسط

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+4x+1+3x-1}{x^2+7x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2+7x}{x^2+7x}$$

نأخذ عامل مشترك من البسط و المقام للتخلص من العامل الصفرى

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+7x}{x^2+7x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(4x+7)}{x(x+7)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x+7}{x+7} = \frac{4(0)+7}{0+7} = \frac{7}{7} = 1$$

8) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+|x-2|-4}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0}$

نتخلص من رمز المقياس

$$|x-2| = \begin{cases} +(x-2) = x-2 & x > 2 \\ -(x-2) = -x+2 & x < 2 \end{cases}$$

$\because x \to 1 \Rightarrow \therefore x < 2 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+|x-2|-4}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-x+2-4}{x^2+2x-3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-x-2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{x+3} = \frac{3(1)+2}{1+3} = \frac{5}{4} = 1.25$$

حل تمرين (٢) باستخدام قاعدة لوبيتال

1) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{x^2-4x} = \frac{(4)^3-16(4)}{(4)^2-4(4)} = \frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-16}{2x-4} = \frac{3(4)^2-16}{2(4)-4} = \frac{32}{4} = 8$$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2-9} = \frac{2(3)^2-3(3)-9}{(3)^2-9} = \frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{4x-3}{2x} = \frac{4(3)-3}{2(3)} = \frac{9}{6} = 1.5$$

3) $\lim_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^2+x-6} = \frac{(-3)^4-81}{(-3)^3+(-3)-6} = \frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-81}{x^2+x-6}=\lim_{x\to -3}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{4x^3}{2x+1}=\frac{4(-3)^3}{2(-3)+1}=\frac{-108}{-5}=21.6$$

4) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+7x+12}=\frac{(-3)^3-27}{(-3)^2+7(-3)+12}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{3x^2}{2x+7}=\frac{3(-3)^2}{2(-3)+7}=\frac{27}{1}=27$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+5)^2-25}{x}=\frac{(0+5)^2-25}{0}=\frac{0}{0}$

نفك الاقواس فى البسط

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+10x+25-25}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+10x}{x}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+10x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+10}{1}=\frac{2(0)+10}{1}=\frac{10}{1}=10$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x-1)^2-1}=\frac{0}{(0-1)^2-1}=\frac{0}{0}$

نفك الاقواس فى المقام

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2-2x+1-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2-2x}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x-2}=\frac{1}{2(0)-2}=\frac{1}{-2}=-0.5$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^2+3x-1}{x^2+7x}=\frac{0}{0}$

نفك الاقواس فى البسط

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+4x+1+3x-1}{x^2+7x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{x^2+7x}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{x^2+7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x+7}{2x+7}=\frac{8(0)+7}{2(0)+7}=\frac{7}{7}=1$$

8) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+|x-2|-4}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}$

نتخلص من رمز المقياس

$$|x-2|=\begin{cases}+(x-2)=x-2 & x>2\\ -(x-2)=-x+2 & x<2\end{cases}$$

$\because x\to 1 \Rightarrow \therefore x<2 \Rightarrow |x-2|=-x+2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+|x-2|-4}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x+2-4}{x^2+2x-3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+|x-2|-4}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2+2x-3}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x-1}{2x+2}=\frac{6(1)-1}{2(1)+2}=\frac{5}{4}=1.25$$

تمرين (٤) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2-28}{x^2-4}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

4) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

CARVEN

حل تمرين (٤)

1) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}=\frac{2(-2)^3+3(-2)^2+4}{(-2)^3+8}=\frac{0}{0}$

نحلل المقام ونقسم البسط للتخلص من العامل الصفرى $(x+2)$

خد بالك

* نقسم البسط على العامل الصفرى $(x+2)$ كما يلى :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x+2 & \\ \hline 2x^3+3x^2+4 & (x+2) \\ 2x^3+4x^2 & \\ \hline -x^2+4 & \\ -x^2-2x & \\ \hline 2x+4 & \\ 2x+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x^2-x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-x+2}{x^2-2x+4}=\frac{2(-2)^2-(-2)+2}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{12}{12}=1$$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2-28}{x^2-4}=\frac{(2)^3+5(2)^2-28}{(2)^2-4}=\frac{0}{0}$

نحلل المقام ونقسم البسط للتخلص من العامل الصفرى $(x-2)$

خد بالك

* نقسم البسط على العامل الصفرى $(x-2)$ كما يلى :

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+14 & \\ \hline x^3+5x^2-28 & (x-2) \\ x^3-2x^2 & \\ \hline 7x^2-28 & \\ 7x^2-14x & \\ \hline 14x-28 & \\ 14x-28 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2-28}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+7x+14)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x+14}{x+2}=\frac{(2)^2+7(2)+14}{2+2}=\frac{32}{4}=8$$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2-1}-1}{2-2}=\frac{0}{0}$

نضرب فى مرافق البسط للتخلص من العامل الصفرى $(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}$$

خد بالك عند الضرب فى المرافق نراعى الأتى :

نضرب البسط فى البسط ونضرب المقام فى المقام

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0.5$$

4) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}=\frac{-3+3}{\sqrt{-3+4}-1}=\frac{0}{0}$

نضرب فى مرافق المقام للتخلص من العامل الصفرى $(x+3)$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}\times\frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(x+3)}=\lim_{x\to -3}\sqrt{x+4}+1$$

$$=\sqrt{-3+4}+1=\sqrt{1}+1=1+1=2$$

حل تمرين (٤) باستخدام قاعدة لوبيتال

1) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}=\frac{2(-2)^3+3(-2)^2+4}{(-2)^3+8}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{6x^2+6x}{3x^2}=\frac{6(-2)^2+6(-2)}{3(-2)^2}=\frac{12}{12}=1$$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2-28}{x^2-4}=\frac{(2)^3+5(2)^2-28}{(2)^2-4}=\frac{0}{0}$

CARVEN

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2-28}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+10x}{2x}=\frac{3(2)^2+10(2)}{2(2)}=\frac{32}{4}=8$$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2-1}-1}{2-2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^{1/2}-1}{x-2}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^{1/2}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2}(1)(x-1)^{-1/2}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{2}(2-1)^{-1/2}=\frac{1}{2}=0.5$$

4) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}=\frac{-3+3}{\sqrt{-3+4}-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+4)^{1/2}-1}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+4)^{1/2}-1}=\lim_{x\to -3}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{1}{\frac{1}{2}(1)(x+4)^{-1/2}}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{\frac{1}{2}(x+4)^{-1/2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}(-3+4)^{-1/2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

نظرية (١)

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n(a)^{n-1}$$

نظرية (٢)

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{n}{m}(a)^{n-m}$$

■ **عند إستخدام النظرية نراعى الأتى :**

١) إخراج العامل المشترك من البسط أو المقام أن وجد .

٢) رفع الأعداد إلى القوى الأسية المناسبة كما يلي :

العدد	4	8	16	32	64	128	256	512
صورته الأسية	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9

العدد	9	27	81	243	...	25	125	625
صورته الأسية	3^2	3^3	3^4	3^5	...	5^2	5^3	5^4

تمرين (٥) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

2) $\lim_{x\to -2}\frac{x^6-64}{x^2-4}$

3) $\lim_{x\to -3}\frac{x^4-81}{x+3}$

4) $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}$

5) $\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{x^5-9\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$

6) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{2x-4}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{4x^3-16x}$

حل تمرين (٥)

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\frac{(2)^4-16}{2-2}=\frac{0}{0}$

نطبق النظرية (١)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-(2)^4}{x-2}=4(2)^{4-1}=4(2)^3=32$$

2) $\lim_{x\to -2}\frac{x^6-64}{x^2-4}=\frac{(-2)^6-64}{(-2)^2-4}=\frac{0}{0}$

نطبق النظرية (٢)

CARVEN

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^6-(-2)^6}{x^2-(-2)^2}=\frac{6}{2}(-2)^{6-2}=3(-2)^4=48$$

3) $\lim_{x\to -3}\frac{x^4-81}{x+3}=\frac{(-3)^4-81}{-3+3}=\frac{0}{0}$

نطبق النظرية (١)

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-(-3)^4}{x-(-3)}=4(-3)^{4-1}=4(-3)^3=-108$$

4) $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\frac{(-2)^5+32}{-2+2}=\frac{0}{0}$

نطبق النظرية (١)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5-(-2)^5}{x-(-2)}=5(-2)^{5-1}=5(-2)^4=80$$

5) $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^5-9\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3})^5-9\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{0}{0}$

نطبق النظرية (١)

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^5-(\sqrt{3})^5}{x-\sqrt{3}}=5(\sqrt{3})^{5-1}=5(\sqrt{3})^4=45$$

6) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}=\frac{0}{0}$

نطبق النظرية (١)

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^{1/2}-(9)^{1/2}}{x-9}=\frac{1}{2}(9)^{1/2-1}=\frac{1}{2}(9)^{-1/2}=\frac{1}{6}$$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{2x-4}=\frac{(2)^7-128}{2(2)-4}=\frac{0}{0}$

نأخذ عامل مشترك من المقام

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{x-2}$$

نطبق النظرية (١)

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^7-(2)^7}{x-2}=\frac{1}{2}(7)(2)^{7-1}=224$$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{4x^3-16x}=\frac{(2)^5-32}{4(2)^3-16(2)}=\frac{0}{0}$

نأخذ عامل مشترك من المقام

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{4x(x^2-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{4x}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^2-4}$$

نطبق النظرية (٢)

$$=\frac{1}{8}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^5-(2)^5}{x^2-(2)^2}=\frac{1}{8}(\frac{5}{2})(2)^{5-2}=2.5$$

حل تمرين (٥) باستخدام قاعدة لوبيتال

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\frac{(2)^4-16}{2-2}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{1}=\lim_{x\to 2}4x^3=4(2)^3=32$$

2) $\lim_{x\to -2}\frac{x^6-64}{x^2-4}=\frac{(-2)^6-64}{(-2)^2-4}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^6-64}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{6x^5}{2x}=\lim_{x\to -2}3x^4=3(-2)^4=48$$

3) $\lim_{x\to -3}\frac{x^4-81}{x+3}=\frac{(-3)^4-81}{-3+3}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-81}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{4x^3}{1}=\lim_{x\to -3}4x^3=4(-3)^3=-108$$

CARVEN

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{4x^3-16x}=\lim_{x\to 2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5x^4}{12x^2-16}=\frac{5(2)^4}{12(2)^2-16}=\frac{80}{32}=2.5$$

خد بالك عند إيجاد النهاية وكان البسط أو المقام يحتوى على أقواس بأسس كبيرة فيلزم استخدام النظرية، وإذا تعذر استخدامها نلفق مقام للبسط أو العكس للوصول لصورة النظرية .....

تمرين (٦) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^4-81}{x-4}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

3) $\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)^3-64}{x-3}$ 4) $\lim_{e\to 0}\frac{(e+5)^3-125}{3e}$

حل تمرين (٦)

1) $\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^4-81}{x-4}=\frac{(4-1)^4-81}{4-4}=\frac{0}{0}$

نعدل المقام حتى يمكن تطبيق النظرية

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^4-81}{x-4}=\lim_{x-1\to 3}\frac{(x-1)^4-(3)^4}{(x-1)-3}$$

نطبق النظرية (١)

$$=\lim_{x-1\to 3}\frac{(x-1)^4-(3)^4}{(x-1)-3}=4(3)^3=108$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}=\frac{(0+1)^5-1}{0}=\frac{0}{0}$

نعدل المقام حتى يمكن تطبيق النظرية

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}=\lim_{x+1\to 1}\frac{(x+1)^5-1}{(x+1)-1}$$

نطبق النظرية (١)

$$=\lim_{x+1\to 1}\frac{(x+1)^5-(1)^5}{(x+1)-1}=5(1)^{5-1}=5$$

4) $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\frac{(-2)^5+32}{-2+2}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5x^4}{1}=\lim_{x\to -2}5x^4=5(-2)^4=80$$

5) $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^5-9\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3})^5-9\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^5-9\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{5x^4}{1}=\lim_{x\to\sqrt{3}}5x^4=5(\sqrt{3})^4=45$$

6) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{x^{1/2}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{1}=\frac{1}{2}(x)^{-1/2}=\frac{1}{2}(9)^{-1/2}=\frac{1}{6}$$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{2x-4}=\frac{(2)^7-128}{2(2)-4}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{7x^6}{2}=\frac{7(2)^6}{2}=224$$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{4x^3-16x}=\frac{(2)^5-32}{4(2)^3-16(2)}=\frac{0}{0}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$3)\ \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)^3-64}{x-3}=\frac{(3+1)^5-64}{3-3}=\frac{0}{0}$$

نعدل المقام حتى يمكن تطبيق النظرية

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)^3-64}{x-3}=\lim_{x+1\to 4}\frac{(x+1)^3-(4)^3}{(x+1)-4}$$

نطبق النظرية (١)

$$=\lim_{x+1\to 4}\frac{(x+1)^3-(4)^3}{(x+1)-4}=3(4)^{3-1}=48$$

$$4)\ \lim_{e\to 0}\frac{(e+5)^3-125}{3e}=\frac{(0+5)^3-125}{3(0)}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{e\to 0}\frac{(e+5)^3-125}{3e}$$

$$=\lim_{e\to 0}\frac{1}{3}\times\lim_{e\to 0}\frac{(e+5)^3-125}{e}$$

$$=\frac{1}{3}\times\lim_{e\to 0}\frac{(e+5)^3-125}{e}$$

نعدل المقام حتى يمكن تطبيق النظرية

$$=\frac{1}{3}\times\lim_{e+5\to 5}\frac{(e+5)^3-(5)^3}{(e+5)-5}$$

نطبق النظرية (١)

$$=\frac{1}{3}\times\lim_{e+5\to 5}\frac{(e+5)^3-(5)^3}{(e+5)-5}=\frac{1}{3}(3)(5)^{3-1}=25$$

٢) نهاية الدالة عندما (x) تؤول إلى (∞)

خطوات الحل :

* نقسم كلاً من البسط والمقام على (x) مرفوعة لأكبر أس .

■ **مع ملاحظة أن :**

1) $x=\sqrt{x^2}=\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[4]{x^4}=\dots$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\text{عدد}}{x}=0$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{\text{عدد}}{x^n}=0$

تمرين (٧) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x-1}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{5x^2-2x+1}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^3-1}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+4x+1}$

حل تمرين (٧)

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على (x)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{2+\frac{5}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{5x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على (x^2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0-0}{5-0+0}=\frac{3}{5}$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^3-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على (x^3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+4x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على (x^2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2-\frac{3}{x^2}}{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{5+0-0}=\frac{2}{5}$$

CARVEN

حل تمرين (٧) باستخدام قاعدة لوبيتال

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}=\frac{2}{3}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{5x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{5x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{5x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{10x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال كمان مرة

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{10x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^3-1}=\frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{3x^2}=\frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال كمان مرة

$\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}=\frac{10}{6x}=0$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+4x+1}=\frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{10x}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

تمرين (٨) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-4x-3}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+4}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x^2+5}{x^3-2x-4}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2}{3x^2-x}$

6) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2-25}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+2}}$

8) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-x-1}}{2x+1}$

حل تمرين (٨)

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-4x-3}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط والمقام على (x^2)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4x}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{2+0}{1-0-0}=2$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+4}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط والمقام على (x^2)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x^2+5}{x^3-2x-4}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط والمقام على (x^3)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\frac{2+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{2+0+0}{2-0-0}=2$

CARVEN

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط والمقام على (x^3)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0+0}{1+0}=0$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2}{3x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط والمقام على (x^3)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\frac{1+\frac{6}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}$

ليس للدالة نهاية

6) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2-25}}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط على (x) والمقام على (x^2)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{25}{x^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{9+0}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+2}}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط على (x^2) والمقام على (x^4)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[4]{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2}{x^4}}}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt[4]{1+0}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt[4]{1}}=\frac{1}{1}=1$

8) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-x-1}}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط على (x^3) والمقام على (x)

⇐(كمل أنت الحل)⇒

ثالثاً : اتصال الدالة

الدالة بقاعدة واحدة	الدالة بقاعدتين
١) نوجد قيمة الدالة $F(x)$ عند النقطة المطلوبة (a) للتأكد من أن الدالة معرفة عند هذه النقطة .	١) نوجد النهاية اليمنى للدالة عند $(x>a)$.
٢) نوجد نهاية الدالة عند نفس النقطة .	٢) نوجد النهاية اليسرى للدالة عند $(x<a)$.
٣) الدالة متصلة إذا كانت : قيمة الدالة = نهاية الدالة	٣) الدالة متصلة إذا كانت : النهاية اليمنى للدالة = النهاية اليسرى للدالة

ملاحظات

١) الدوال كثيرة الحدود مستمرة دائما عند أى نقطة .

٢) الدوال الكسرية غير مستمرة دائما عند مجموعة أصفار المقام ، لان عند هذه النقط تكون الدالة غير معرفة .

تمرين (١) ابحث اتصال الدالة التالية عند $x=3$

$F(x)=4-2x^2$

حل تمرين (١)

$\because F(x)=4-2x^2$

1) $F(3)=4-2(3)^2=4-18=-14$

(الدالة معرفة)

2) $\lim_{x\to3}4-2x^2=4-2(3)^2=-14$

$\because F(x)=\lim_{x\to3}F(x)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $(x=3)$

تمرين (٢) ابحث استمرار الدالة عند $x=1$

$F(x)=x^2+2x+1$

حل تمرين (٢)

$\because F(x)=x^2+2x+1$

1) $F(1)=(1)^2+2(1)+1=4$ ⇒ (الدالة معرفة)

2) $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x + 1 = (1)^2 + 2(1) + 1 = 4$

$\because F(x) = \lim_{x\to 1} F(x)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $(x = 1)$

تمرين (٣) ابحث اتصال الدالة التالية عند $x = 1$

$$F(x) = \frac{x}{x-2}$$

حل تمرين (٣)

$\because F(x) = \frac{x}{x-2}$

1) $F(1) = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$ (الدالة معرفة)

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$

$\because F(x) = \lim_{x\to 1} F(x)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $(x = 1)$

تمرين (٤) ابحث اتصال الدالة التالية عند $x = 2$

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

حل تمرين (٤)

$\because F(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$

1) $F(2) = \frac{(2)^2 - 4}{2-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ (الدالة غير معرفة)

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند $(x = 2)$

تمرين (٥) ابحث استمرار الدالة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ 3 - x & x \leq 1 \end{cases}$$

حل تمرين (٥)

1) $\lim_{x\to 1^+} x^2 + 1 = (1)^2 + 1 = 2 \Longrightarrow (1)$

2) $\lim_{x\to 1^-} 3 - x = 3 - 1 = 2 \Longrightarrow (2)$

$\because \lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = 2$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $(x = 1)$

تمرين (٦) ابحث استمرار الدالة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ 7 - x & x > 2 \end{cases}$$

حل تمرين (٦)

1) $\lim_{x\to 2^+} 7 - x = 7 - 2 = 5 \Longrightarrow (1)$

2) $\lim_{x\to 2^-} 2x + 1 = 2(2) + 1 = 5 \Longrightarrow (2)$

$\because \lim_{x\to 2^+} F(x) = \lim_{x\to 2^-} F(x) = 5$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $(x = 2)$

تمرين (٧) ابحث استمرار الدالة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 3 \\ \frac{1}{x-2} & x \leq 3 \end{cases}$$

حل تمرين (٧)

1) $\lim_{x\to 3^+} 2x + 1 = 2(3) + 1 = 7 \Longrightarrow (1)$

2) $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow (2)$

$\because \lim_{x\to 3^+} F(x) \neq \lim_{x\to 3^-} F(x)$

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند $(x = 3)$

تمرين (٨) ابحث استمرار الدالة التالية :

$$F(x) = |x - 1| + 2$$

حل تمرين (٨)

$\because F(x) = |x - 1| + 2$

نتعامل مع المقياس

$$\therefore F(x) = \begin{cases} +(x-1) + 2 = x - 1 + 2 & x \geq 1 \\ -(x-1) + 2 = -x + 1 + 2 & x < 1 \end{cases}$$

CARVEN

$$\therefore F(X) = \begin{cases} X+1 & X \geq 1 \\ 3-X & X < 1 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{X \to 1^+} X + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \Longrightarrow (1)$

2) $\lim\limits_{X \to 1^-} 3 - X = 3 - 1 = 2 \quad \Longrightarrow (2)$

$\because \lim\limits_{X \to 1^+} F(X) = \lim\limits_{X \to 1^-} F(X) = 2$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $(X = 1)$

تمرين (٩) أوجد قيمة (b) التى يجعل الدالة التالية متصلة عند $X = 1$

$$F(X) = \begin{cases} X^2 + 1 & X \leq 1 \\ X + b & X > 1 \end{cases}$$

حل تمرين (٩)

■ حتى تكون الدالة متصلة عند $(X = 1)$ يجب أن يكون :

$$\lim_{X \to 1^+} F(X) = \lim_{X \to 1^-} F(X)$$

1) $\lim\limits_{X \to 1^+} X + b = 1 + b \quad \Longrightarrow (1)$

2) $\lim\limits_{X \to 1^-} X^2 + 1 = (1)^2 + 1 = 2 \quad \Longrightarrow (2)$

$\therefore 1 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 1 = 1$

$\therefore$ حتى تكون الدالة متصلة يجب أن تكون $(b = 1)$

تمرين (١٠) أوجد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{X \to 3^-} \dfrac{|X-3|}{X-3}$ 2) $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{|X|}{X}$

3) $\lim\limits_{X \to 2} F(X) \Rightarrow F(X) = \begin{cases} 3X & X > 2 \\ X^2 & X \leq 2 \end{cases}$

حل تمرين (١٠)

1) $F(X) = \dfrac{|X-3|}{X-3}$

$$\therefore F(X) = \begin{cases} \dfrac{+(X-3)}{X-3} = \dfrac{X-3}{X-3} = 1 & X \geq 3 \\ \dfrac{-(X-3)}{X-3} = \dfrac{3-X}{X-3} = -1 & X < 3 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{X \to 3^-} \frac{|X-3|}{X-3} = \lim_{X \to 3^-} (-1) = -1$$

2) $F(X) = \dfrac{|X|}{X}$

$$\therefore F(X) = \begin{cases} \dfrac{+X}{X} = 1 & X \geq 0 \\ \dfrac{-X}{X} = -1 & X < 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{|X|}{X} = \lim\limits_{X \to 0^+} (1) = 1 \quad \Longrightarrow (1)$

2) $\lim\limits_{X \to 0^-} \dfrac{|X|}{X} = \lim\limits_{X \to 0^-} (-1) = -1 \quad \Longrightarrow (2)$

$\because \lim\limits_{X \to 0^+} F(X) \neq \lim\limits_{X \to 0^-} F(X)$

$\therefore$ ليس للدالة نهاية

3) $F(X) = \begin{cases} 3X & X > 2 \\ X^2 & X \leq 2 \end{cases}$

1) $\lim\limits_{X \to 2^+} 3X = 3(2) = 6 \quad \Longrightarrow (1)$

2) $\lim\limits_{X \to 2^-} X^2 = (2)^2 = 4 \quad \Longrightarrow (2)$

$\because \lim\limits_{X \to 2^+} F(X) \neq \lim\limits_{X \to 2^-} F(X)$

$\therefore$ ليس للدالة نهاية

تمرين (١١) ابحث استمرار الدالة عند $X = 4$

$$F(X) = \frac{|X-4|}{X-4}$$

حل تمرين (١١)

$$F(X) = \begin{cases} \dfrac{+(X-4)}{X-4} = \dfrac{X-4}{X-4} = 1 & X \geq 4 \\ \dfrac{-(X-4)}{X-4} = \dfrac{4-X}{X-4} = -1 & X < 4 \end{cases}$$

CARVEN

1) $\lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1 \quad \Longrightarrow (1)$

2) $\lim_{x\to 4^-} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1 \quad \Longrightarrow (2)$

$\because \lim_{x\to 4^+} F(x) \neq \lim_{x\to 4^-} F(x)$

∴ الدالة غير متصلة عند $(x = 4)$

تمرين للتطبيق أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x^2-9}$

3) $\lim_{x\to 3} \frac{(x-1)^4-16}{x-3}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^2-4}{x}$

5) $\lim_{x\to 3} \frac{(x+1)^3-64}{x-3}$

6) $\lim_{e\to 0} \frac{(e+4)^3-64}{2e}$

7) $\lim_{x\to \infty} \frac{4-3x}{2+4x}$

8) $\lim_{x\to \infty} \frac{5+2x}{1-x+x^3}$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2-2}{x^3-1}$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-2x+1}{2x^3+x-3}$

تمرين للتطبيق ابحث استمرار الدوال التالية :

1) $F(x) = x^2 - 3x + 1$ عند النقطة $(x = 2)$

2) $F(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ عند النقطة $(x = 5)$

3) $F(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \leqslant 1 \\ 5-x & x > 1 \end{cases}$

CARVEN