③ التفاضل

■ إيجاد المشتقة الأولى بقواعد التفاضل

قاعدة (1) : تفاضل الثابت

$y = a$ (ثابت) $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ = صفر

قاعدة (2) : تفاضل (x)

$y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

قاعدة (3) : تفاضل (ax)

$y = ax \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a$

قاعدة (4) : تفاضل (x^n)

$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$

قاعدة (5) : تفاضل ($a\,x^n$)

$y = ax^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a\,(n)\,x^{n-1}$

قاعدة (6) : تفاضل القوس

$y = (\text{دالة})^n$

$\frac{dy}{dx} = n\,(\text{الدالة})^{n-1} \times$ تفاضل ما بداخل القوس

قاعدة (7) : تفاضل الدالة الأسية بالاساس (e)

$y = e^{(\text{دالة})}$

$\frac{dy}{dx} = e^{(\text{دالة})} \times$ تفاضل الأس $\times \operatorname{Ln} e$

قاعدة (8) : تفاضل الدالة الأسية بالاساس (a)

$y = a^{(\text{دالة})}$

$\frac{dy}{dx} = a^{(\text{دالة})} \times$ تفاضل الأس $\times \operatorname{Ln} a$

قاعدة (9) : تفاضل الدالة اللوغاريتميه بالأساس (e)

$y = \operatorname{Log}_e(\text{دالة}) = \operatorname{Ln}(\text{دالة})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{تفاضل الدالة بدون الوغاريتم}}{\text{الدالة كما هى بدون اللوغاريتم}}$

قاعدة (10) : تفاضل الدالة اللوغاريتميه بالأساس (a)

$y = \operatorname{Log}_a(\text{دالة})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{تفاضل الدالة بدون الوغاريتم}}{\text{الدالة كما هى بدون اللوغاريتم}} \times \frac{1}{\operatorname{Ln} a}$

ثوابت

1) $y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

2) $y = \operatorname{Ln}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

قاعدة (11) : تفاضل حاصل ضرب دالتين

$y =$ حاصل ضرب دالتين

$\frac{dy}{dx} =$ تفاضل الأولى × الثانية + تفاضل الثانية × الأولى

قاعدة (12) : تفاضل خارج قسمة دالتين

$y =$ خارج قسمة دالتين

$\frac{dy}{dx} = \frac{[\text{تفاضل المقام} \times \text{البسط}] - [\text{تفاضل البسط} \times \text{المقام}]}{\text{مربع المقام}}$

قاعدة (13) : تفاضل الدالة الضمنية

■ **الدالة الضمنية** : يصعب فيها الفصل بين المتغيرين (y) و (x).

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (x)}}{\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (y)}}$

قاعدة (14) : تفاضل دالة الدالة

إذا كانت : $y = f(u)$ $\quad u = f(v)$

■ فيكون تفاضل (y) بالنسبة إلى (u) $\Leftarrow \frac{dy}{du}$

■ فيكون تفاضل (u) بالنسبة إلى (x) $\Leftarrow \frac{du}{dx}$

فيكون تفاضل (y) بالنسبة إلى (x)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

■ بحث تزايد وتناقص الدالة ■

1) نوجد المشتقة التفاضلية الأولى للدالة $\frac{dy}{dx}$.

2) نضع المشتقة التفاضلية الأولى $\frac{dy}{dx}$ = صفر .

↳ [لتحديد النقط الحرجة للمتغير (X)] .

3) تحديد الفترات المختلفة بين النقاط الحرجة .

4) تحديد فترات تزايد وتناقص الدالة عن طريق بحث إشارة المشتقة فى هذه الفترات ، بإختيار نقاط تنتمى لتلك الفترات والتعويض بها فى المشتقة الأولى . فإذا كان :

ناتج التعويض < الصفر	ناتج التعويض > الصفر
تكون الدالة متزايدة	تكون الدالة متناقصة

■ إيجاد النهاية العظمى والصغرى للدالة ■

1) نوجد المشتقة التفاضلية الأولى للدالة $\frac{dy}{dx}$.

2) نضع المشتقة التفاضلية الأولى $\frac{dy}{dx}$ = صفر .

↳ [لتحديد النقط الحرجة للمتغير (X)] .

3) نوجد المشتقة التفاضلية الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4) نعوض بالنقط الحرجة فى المشتقة الثانية . فإذا كان :

ناتج التعويض < الصفر	ناتج التعويض > الصفر
نقطة نهاية صغرى	نقطة نهاية عظمى

ناتج التعويض = الصفر

ليست نقطة نهاية صغرى أو نهاية عظمى

ملحوظة :

1) الدالة الخطية تكون متزايدة دائما إذا كان معامل (X) موجب .
2) الدالة الخطية تكون متناقصة دائما إذا كان معامل (X) سالب .
3) الدالة الخطية ليست لها نقط عظمى أو صغرى

■ التفاضل الجزئى ■

■ يعتبر تكملة لتفاضل الدوال الضمنية ولا يطبق إلا إذا كانت الدالة فى أكثر من متغير .

إذا كانت الدالة : $y = f(x, u)$

■ فتكون المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (X) :

$\frac{\partial y}{\partial x}$ = نفاضل الدالة بالنسبة لـ (X) مع اعتبار (u) ثابت

■ وتكون المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (u) :

$\frac{\partial y}{\partial u}$ = نفاضل الدالة بالنسبة لـ (u) مع اعتبار (X) ثابت

■ وتكون المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ (X) مع اعتبار (u) ثابت} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ (u) مع اعتبار (X) ثابت} \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ (u) مع اعتبار (X) ثابت} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} & \text{نفاضل تانى بالنسبة لـ (X) مع اعتبار (u) ثابت} \end{cases}$$

■ ملاحظات أثناء المراجعة ■

CARVEN

تمارين من امتحانات سابقة

تمرين 1 أوجد المشتقات التالية : اكتوبر 2013

انتظام 2009

1) $y = e^{x\,Ln(x)}$

2) $y = 10^{(x^2 - x + 1)}$

3) $y = Log_{10}(3x^4 + 7x^2 + 3)$

4) $y = e^{x^2 Ln(x)}$

حل تمرين 1

1) $y = e^{x\,Ln(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \left[(x)(\frac{1}{x}) + (Lnx)(1)\right] . e^{x\,Ln(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[1 + Lnx\right] . e^{x\,Ln(x)}$$

2) $y = 10^{(x^2 - x + 1)}$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 1) . 10^{(x^2 - x + 1)} . (Ln\,10)$$

3) $y = Log_{10}(3x^4 + 7x^2 + 3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 + 14x}{3x^4 + 7x^2 + 3} \cdot \frac{1}{Ln(10)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 + 14x}{[3x^4 + 7x^2 + 3]Ln(10)}$$

4) $y = e^{x^2\,Ln(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \left[(x^2)(\frac{1}{x}) + (Lnx)(2x)\right] . e^{x^2\,Ln(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[x + 2x\,Ln(x)\right] . e^{x^2\,Ln(x)}$$

تمرين 2 أوجد المشتقات التالية : يناير 2012

1) $y = \frac{e^{x^2}}{Ln(x^3 + 3)}$ 2) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

3) $y = 5^{(3x^2 + 1)}$ 4) $y = \frac{Ln(x^2 + 3)}{x}$

5) $y = Log_{10}(3x^3 + 2)$ يناير 2010

حل تمرين 2

1) $y = \frac{e^{x^2}}{Ln(x^3 + 3)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[Ln(x^3 + 3)(e^{x^2})(2x)] - [(e^{x^2})(\frac{3x^2}{x^3 + 3})]}{[Ln(x^3 + 3)]^2}$$

2) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = (x^2 + 2x + 1)^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{2})(x^2 + 2x + 1)^{-1/2} . (2x + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} . (2x + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 1}} = \frac{2(x + 1)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

3) $y = 5^{(3x^2 + 1)}$

$$\frac{dy}{dx} = (6x) . 5^{(3x^2 + 1)} . Ln\,(5)$$

4) $y = \frac{Ln(x^2 + 3)}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[(x)(\frac{2x}{x^2 + 3})] - [Ln(x^2 + 3)(1)]}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2x^2}{x^2 + 3} - Ln(x^2 + 3)}{x^2}$$

5) $y = Log_{10}(3x^3 + 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2}{3x^3 + 2} \cdot \frac{1}{Ln(10)} = \frac{9x^2}{[3x^3 + 2]Ln(10)}$$

تمرين 3 أوجد المشتقات التالية : انتساب 2009

1) $y = e^{\sqrt{x^2 + 1}}$ 2) $y = Log_{10}(x^2 - 3)$

3) $y = \frac{Ln(x)}{x}$ 4) $y = \sqrt{(2x^3 + x)^4}$

5) $y = 5x^3 + 4x^{-1} + e^x$

CARVEN

حل تمرين 3

❶ $y = e^{\sqrt{x^2+1}} = e^{(x^2+1)^{1/2}}$

$\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{2})(x^2+1)^{-1/2} \cdot (2x) \cdot e^{(x^2+1)^{1/2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot e^{(x^2+1)^{1/2}}$

---

❷ $y = \text{Log}_{10}(x^2-3)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-3} \cdot \frac{1}{\text{Ln}(10)} = \frac{2x}{[x^2-3]\text{Ln}(10)}$

---

❸ $y = \frac{\text{Ln}(x)}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{[(x)(\frac{1}{x})] - [\text{Ln}(x)(1)]}{x^2} = \frac{1-\text{Ln}(x)}{x^2}$

---

❹ $y = \sqrt{(2x^3+x)^4} = (2x^3+x)^{4/2}$

$y = (2x^3+x)^2$

$\frac{dy}{dx} = 2(2x^3+x)(6x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = (4x^3+2x)(6x^2+1)$

---

❺ $y = 5x^3 + 4x^{-1} + e^x$

$\frac{dy}{dx} = 5(3)x^2 + 4(-1)x^{-2} + e^x$

$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 4x^{-2} + e^x$

$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - \frac{4}{x^2} + e^x$

تمرين 4 أوجد المشتقات التالية:

1) $y = 3x^2 - 2x^{-1} + \text{Ln}(x)$ — مايو 2007

2) $y = \sqrt{(4x^2-x)^6}$ — مايو 2008

3) $y = x^5 \cdot \text{Ln}(2x^2+1)^2$ — مايو 2004

4) $y = e^{x^5} \cdot \text{Ln}(2x+3)$

5) $y = \frac{(x+2)e^x}{x^2+3}$ 6) $y = [\text{Ln}(x^2-5)]^3$

حل تمرين 4

❶ $y = 3x^2 - 2x^{-1} + \text{Ln}(x)$

$\frac{dy}{dx} = 3(2)x - 2(-1)x^{-2} + \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x^{-2} + \frac{1}{x} = 6x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$

---

❷ $y = \sqrt{(4x^2-x)^6} = (4x^2-x)^{6/2}$

$y = (4x^2-x)^3$

$\frac{dy}{dx} = 3(4x^2-x)^2(8x-1)$

$\frac{dy}{dx} = (4x^2-x)^2(24x-3)$

---

❸ $y = x^5 \cdot \text{Ln}(2x^2+1)^2$

$\frac{dy}{dx} = [(x^5) \cdot \frac{2(2x^2+1)(4x)}{(2x^2+1)^2}] + [\text{Ln}(2x^2+1)^2 \cdot (5x^4)]$

$\frac{dy}{dx} = [\frac{8x^6}{2x^2+1}] + [5x^4 \cdot \text{Ln}(2x^2+1)^2]$

---

❹ $y = e^{x^5} \cdot \text{Ln}(2x+3)$

$\frac{dy}{dx} = e^{x^5}[\frac{2}{2x+2}] + \text{Ln}(2x+3)[(5x^4)e^{x^5}]$

---

❺ $y = \frac{(x+2)e^x}{x^2+3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{[(x^2+3)(x+2)e^x + e^x] - [(x+2)e^x(2x)]}{[x^2+3]^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{[(x^3+2x^2+6x)e^x + e^x] - [(2x^2+4x)e^x]}{[x^2+3]^2}$

---

❻ $y = [\text{Ln}(x^2-5)]^3$

$\frac{dy}{dx} = 3[\text{Ln}(x^2-5)]^2 \cdot [\frac{2x}{x^2-5}]$

$\frac{dy}{dx} = [\text{Ln}(x^2-5)]^2 \cdot [\frac{6x}{x^2-5}]$

CARVEN

تمرين 5 أوجد المشتقات التالية : مايو 2001

1) $y = x \cdot \text{Ln}(x^3)$

2) $y = \dfrac{x^2+3}{e^x}$

3) $y = \dfrac{x^2+5x+2}{x+5}$

4) $y = x \cdot \text{Ln}(x)$

5) $y = 10^{(x^2+1)}$

6) $y = [\text{Ln}(2x^2+1)]^3$

مايو 2000 حل تمرين 5

1) $y = x \cdot \text{Ln}(x^3)$

$\dfrac{dy}{dx} = x\left[\dfrac{3x^2}{x^3}\right] + \text{Ln}(x^3)[1]$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^3}{x^3} + \text{Ln}(x^3) = 3 + \text{Ln}(x^3)$

---

2) $y = \dfrac{x^2+3}{e^x}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{[(e^x)\cdot(2x)] - [(x^2+3)\cdot(e^x)]}{(e^x)^2}$

---

3) $y = \dfrac{x^2+5x+2}{x+5}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{[(x+5)(2x+5)] - [(x^2+5x+2)(1)]}{[x+5]^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{[2x^2+15x+25] - [x^2+5x+2]}{x^2+10x+25}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2+15x+25-x^2-5x-2}{x^2+10x+25}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+10x+23}{x^2+10x+25}$

---

4) $y = x \cdot \text{Ln}(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = x\left[\dfrac{1}{x}\right] + \text{Ln}(x)[1] = 1 + \text{Ln}(x)$

---

5) $y = 10^{(x^2+1)}$

$\dfrac{dy}{dx} = 2x\left[10^{(x^2+1)}\right]\text{Ln}(10)$

---

6) $y = [\text{Ln}(2x^2+1)]^3$

$\dfrac{dy}{dx} = 3[\text{Ln}(2x^2+1)]^2\left[\dfrac{4x}{2x^2+1}\right]$

تمرين 6 أوجد المشتقات التالية :

1) $y = e^{x^3} \cdot \text{Log}_{10}(5x^2+1)$

2) $y = (x^2+3)(x^5-x^3)$

3) $y = e^{(4x^2+3x)}$

4) $y = \text{Ln}(x^2+2x)$

5) $y = e^{x^2}(2x^2+8)$

6) $y = \dfrac{x^3}{\text{Ln}(x)}$

حل تمرين 6

1) $y = e^{x^3} \cdot \text{Log}_{10}(5x^2+1)$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{x^3}\left[\dfrac{10x}{[5x^2+1]\,\text{Ln}(10)}\right]$

$+ \text{Log}_{10}(5x^2+1)\left[(3x^2)\cdot e^{x^3}\right]$

---

2) $y = (x^2+3)(x^5-x^3)$

$y = x^7 - x^5 + 3x^5 - 3x^3$

$y = x^7 + 2x^5 - 3x^3$

$\dfrac{dy}{dx} = 7x^6 + 10x^4 - 9x^2$

---

3) $y = e^{(4x^2+3x)}$

$\dfrac{dy}{dx} = (8x+3)\left[e^{(4x^2+3x)}\right]$

---

4) $y = \text{Ln}(x^2+2x)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x}$

---

5) $y = e^{x^2}(2x^2+8)$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}[4x] + (2x^2+8)[2x\,e^{x^2}]$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}[4x] + (4x^3+16x)[e^{x^2}]$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}(4x^3+16x+4x)$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}(4x^3+20x)$

CARVEN

❻ $y = \frac{x^3}{Ln(x)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{Ln(x)[3x^2] - x^3[\frac{1}{x}]}{[Ln(x)]^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2[Ln(x)] - x^2}{[Ln(x)]^2} = \frac{x^2[3Ln(x) - 1]}{[Ln(x)]^2}$

تمرين 7 أوجد المشتقات العليا للدوال التالية :

1) $y = 3x^3 + 3x^2 + 8x + 3$

2) $y = (2x + 1)(3x + 4)$

حل تمرين 7

❶ $y = 3x^3 + 3x^2 + 8x + 3$

$\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 6x + 8$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x + 6$ $\qquad$ $\frac{d^3y}{dx^3} = 18$

$\frac{d^4y}{dx^4} = zero \Rightarrow$ أعلى رتبة للدالة هى الرتبة الرابعة

❷ $y = (2x + 1)(3x + 4)$

$y = 6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4$

$\frac{dy}{dx} = 12x + 11$ $\qquad$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 12$

$\frac{d^3y}{dx^3} = zero \Rightarrow$ أعلى رتبة للدالة هى الرتبة الثالثة

تمرين 8 أوجد المشتقة الثالثة للدوال التالية :

1) $y = 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 7$

2) $y = 10x^3 + 5e^x + 13$

حل تمرين 8

❶ $y = 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 7$

$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 9x^2 + 2x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 60x^2 + 18x + 2 \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 120x + 18$

❷ $y = 10x^3 + 5e^x + 13$

$\frac{dy}{dx} = 30x^2 + 5e^x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 60x + 5e^x$ $\qquad$ $\frac{d^3y}{dx^3} = 60 + 5e^x$

تمرين 9 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

1) $x^2 + y^2 + xy = 5$

2) $x^3 - x^2y + y^3 - 12 = 0$

3) $x^3y^2 + 2xy^5 + 2x + 2y - 15 = 0$

حل تمرين 9

❶ $x^2 + y^2 + xy = 5$

$x^2 + y^2 + xy - 5 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-[\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (X)}]}{[\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (Y)}]}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-[2x + y]}{2y + x} = \frac{-2x - y}{2y + x}$

❷ $x^3 - x^2y + y^3 - 12 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-[\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (X)}]}{[\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (Y)}]}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-[3x^2 - 2xy]}{3y^2 - x^2} = \frac{-3x^2 + 2xy}{3y^2 - x^2} = \frac{2xy - 3x^2}{3y^2 - x^2}$

❸ $x^3y^2 + 2x^2 + 2x + 2y = 15$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-[\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (X)}]}{[\text{تفاضل الدالة بالنسبة لـ (Y)}]}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-[3x^2y^2 + 4x + 2]}{2x^3y + 2} = \frac{-3x^2y^2 - 4x - 2}{2x^3y + 2}$

تمرين 10 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

1) $y = u^3$, $u = x^2 + 2x$

2) $y = 2u^2 - 4$, $u = 3x + 1$

3) $y = e^u$, $u = x^2 + 3x + 4$

CARVEN

حل تمرين 10

❶ $y = u^3 \ , \ u = x^2 + 2x$

$y = u^3 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$

$u = x^2 + 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 (2x + 2)$

$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 2x)^2 (2x + 2)$

$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x)^2 (6x + 6)$

---

❷ $y = 2u^2 - 4 \ , \ u = 3x + 1$

$y = 2u^2 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 4u$

$u = 3x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 4u(3) = 12u$

$\frac{dy}{dx} = 12(3x + 1) = 36x + 12$

---

❸ $y = e^u \ , \ u = x^2 + 3x + 4$

$y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{du} = e^u$

$u = x^2 + 3x + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u (2x + 3)$

$\frac{dy}{dx} = (2x + 3)\, e^{x^2 + 4x + 3}$

تمرين 11 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

1) $y = \text{Ln}(u) \ , \ u = x^2 + 5x + 7$

2) $y = u^3 - u^2 \ , \ u = 2x^3 + 3$

حل تمرين 11

❶ $y = \text{Ln}(u) \ , \ u = x^2 + 5x + 7$

$y = \text{Ln}(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$

$u = x^2 + 5x + 7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(2x + 5)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 5}{u} = \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 3}$

---

❷ $y = u^3 + u^2 \ , \ u = 2x^3 + 3$

$y = u^3 + u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2 + 2u$

$u = 2x^3 + 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (3u^2 + 2u)(6x^2)$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 [3(2x^3 + 3)^2 + 2(2x^3 + 3)]$

$\frac{dy}{dx} = 18x^2 (2x^3 + 3)^2 + 12x^2 (2x^3 + 3)$

تمرين 12 إذا كان لديك الدالة التالية :

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

❶ فإن الدالة $f(x)$ لها

A) قيمة حرجة واحدة
B) قيمتين حرجتين
C) ثلاث قيم حرجة
D) خلاف ما سبق

❷ فإن الدالة $f(x)$ لها

A) فترتى تناقص وفترة تزايد
B) فترتى تزايد وفترة تناقص
C) ثلاث فترات تزايد
D) خلاف ما سبق

❸ فإن الدالة $f(x)$ لها قيمة صغرى عند

A) $x = 0$
B) $x = 1$
C) $x = 2$
D) خلاف ما سبق

مارس 2021

حل تمرين 12

1) نوجد المشتقة التفاضلية الأولى :

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

2) نضع المشتقة التفاضلية الأولى = صفر :

$f'(x) = 0$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

بالقسمة على (6) $\Leftarrow$ $x^2 + x - 2 = 0$

باستخدام قواعد تحليل المقدار الثلاثى

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$x + 2 = 0 \Rightarrow \therefore x = -2$ أو $x - 1 = 0 \Rightarrow \therefore x = 1$

3) نقسم نطاق الدالة إلى ثلاث فترات كما يلى :

الفترة الأولى	الفترة الثانية	الفترة الثالثة
$]-\infty, -2[$	$]-2, 1[$	$]1, \infty[$

4) بحث تزايد وتناقص الدالة :

فى الفترة الأولى $]-\infty, -2[$: $x < -2$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة $[-3]$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(-3) = 6(-3)^2 + 6(-3) - 12 = 24 > 0$$

الدالة متزايدة لجميع قيم (x) فى الفترة $]-\infty, -2[$

فى الفترة الثانية $]-2, 1[$: $-2 < x < 1$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة $[0]$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(0) = 6(0)^2 + 6(0) - 12 = -12 < 0$$

الدالة متناقصة لجميع قيم (x) فى الفترة $]-2, 1[$

فى الفترة الثالثة $]1, \infty[$: $x > 1$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة $[2]$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(2) = 6(2)^2 + 6(2) - 12 = 24 > 0$$

الدالة متزايدة لجميع قيم (x) فى الفترة $]1, \infty[$

■ الدالة لها قيمة عظمى عند $\Leftarrow$ $x = -2$

■ الدالة لها قيمة صغرى عند $\Leftarrow$ $x = 1$

(بأستخدام اختبار المشتقة الأولى)

تمرين 13 إذا كان لديك الدالة التالية :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

1) فأن الدالة $f(x)$ لها

A) قيمة حرجة واحدة
B) قيمتين حرجتين
C) ثلاث قيم حرجة
D) خلاف ما سبق

2) فأن الدالة $f(x)$ لها

A) فترتى تناقص وفترة تزايد
B) فترتى تزايد وفترتى تناقص
C) ثلاث فترات تزايد
D) خلاف ما سبق

3) فأن الدالة $f(x)$ متزايدة فى الفترة

A) $x < 0$
B) $x > 0$
C) $x > 2$
D) خلاف ما سبق

4) فأن الدالة $f(x)$ متناقصة فى الفترة

A) $x < 2$
B) $0 < x < 2$
C) $x > 4$
D) خلاف ما سبق

5) فأن الدالة $f(x)$ لها قيمة صغرى عند

A) $x = 0$
B) $x = 2$
C) $x = 4$
D) خلاف ما سبق

6) فأن الدالة $f(x)$ لها قيمة عظمى عند

A) $x = 0$
B) $x = 2$
C) $x = 4$
D) خلاف ما سبق

حل تمرين 13 مارس 2021

1) نوجد المشتقة التفاضلية الأولى :

$$f'(x) = \frac{[x-2][2x] - [x^2][1]}{[x-2]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{[x-2]^2} = \frac{x^2 - 4x}{[x-2]^2}$$

2) إيجاد القيم الحرجة :

■ نضع المقام = صفر : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

CARVEN

■ نضع المشتقة التفاضلية الأولى = صفر :

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 4x}{[x-2]^2} = 0$$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad x = 0$$

$$x = 4$$

3) نقسم نطاق الدالة إلى أربع فترات كما يلى :

الفترة الأولى	الفترة الثانية	الفترة الثالثة	الفترة الرابعة
$]-\infty, 0[$	$]0, 2[$	$]2, 4[$	$]4, \infty[$

4) بحث تزايد وتناقص الدالة :

في الفترة الأولى	$]-\infty, 0[$	$x < 0$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة [-1]

$$f'(-1) = \frac{x^2 - 4x}{[x-2]^2} = \frac{(-1)^2 - 4(-1)}{[-1-2]^2} = \frac{5}{9} > 0$$

الدالة متزايدة لجميع قيم (x) فى الفترة $]-\infty, 0[$

في الفترة الثانية	$]0, 2[$	$0 < x < 2$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة [1]

$$f'(1) = \frac{x^2 - 4x}{[x-2]^2} = \frac{(1)^2 - 4(1)}{[1-2]^2} = -3 < 0$$

الدالة متناقصة لجميع قيم (x) فى الفترة $]0, 2[$

في الفترة الثالثة	$]2, 4[$	$2 < x < 4$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة [3]

$$f'(1) = \frac{x^2 - 4x}{[x-2]^2} = \frac{(3)^2 - 4(3)}{[3-2]^2} = -3 < 0$$

الدالة متناقصة لجميع قيم (x) فى الفترة $]2, 4[$

في الفترة الرابعة	$]4, \infty[$	$x > 4$

نختار أى نقطة ولتكن النقطة [5]

$$f'(-1) = \frac{x^2 - 4x}{[x-2]^2} = \frac{(5)^2 - 4(5)}{[5-2]^2} = \frac{5}{9} > 0$$

الدالة متزايدة لجميع قيم (x) فى الفترة $]4, \infty[$

■ الدالة لها قيمة عظمى عند $\Longleftarrow x = 0$

■ الدالة لها قيمة صغرى عند $\Longleftarrow x = 4$

(بأستخدام اختبار المشتقة الأولى)

تمرين 14 أوجد المشتقات الجزئية للدالة التالية :

$$y = x^2 + 2xu + u^3$$

حل تمرين 14

■ المشتقة الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + 2u \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2x + 3u^2$$

■ المشتقة الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} = 2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 6u \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} = 2$$

تمرين 15 أوجد المشتقات الجزئية للدالة التالية :

$$t = 5x^2y^4 + 3xy^2 + 7y^2 + 2x^3$$

حل تمرين 15

■ المشتقة الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 10xy^4 + 3y^2 + 6x^2$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = 20x^2y^3 + 6xy + 14y$$

■ المشتقة الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 10y^4 + 12x \quad , \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 40xy^3 + 6y$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 60x^2y^2 + 6x \quad , \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x} = 40xy^3 + 6y$$

تمرين 16 أوجد المشتقات الجزئية للدالة التالية :

$$y = 2x^3u + 3x\,e^u$$

حل تمرين 16

■ المشتقة الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6x^2u + 3e^u \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2x^3 + 3xe^u$$

CARVEN

■ المشتقة الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12xu \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} = 6x^2 + 3e^y$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 3xe^u \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} = 6x^2 + 3e^u$$

تمرين 17 إذا كانت دالة الايرادات لأحدى السلع :

$$R(x) = 600x - 30x^2$$

❶ فأن عدد الوحدات المنتجة من السلعة الذى يحقق أقصى ربح ممكن هو

A) 10 B) 100 C) 400 D) خلاف ما سبق

❷ فأن أقصى ربح ممكن يساوى

A) 2000 B) 3000 C) 10000 D) خلاف ما سبق

حل تمرين 17 مارس 2021

■ للحصول على عدد الوحدات الذى يحقق أقصى ربح ممكن نتبع الخطوات التالية :

1) نوجد المشتقة الأولى :

$$R'(x) = 600 - 60x$$

2) نضع المشتقة الأولى = صفر :

$$600 - 60x = 0 \quad \Rightarrow \quad 600 = 60x$$

$$x = \frac{600}{60} = 10$$

أقصى ربح ممكن يتحقق عند انتاج 10 وحدات .

■ ويكون أقصى ربح ممكن يساوى :

$$R(x) = 600x - 30x^2$$

$$R(10) = 600(10) - 30(10)^2 = 3000$$

تمرين 18 إذا كانت دالة الايرادات لأحدى السلع :

$$R(x) = 40x - 0.05x^2 - 500$$

❶ فأن عدد الوحدات المنتجة من السلعة الذى يحقق أقصى ربح ممكن هو

A) 200 B) 300 C) 400 D) خلاف ما سبق

❷ فأن أقصى ربح ممكن يساوى

A) 8000 B) 7500 C) 10000 D) خلاف ما سبق

حل تمرين 18 مارس 2021

■ للحصول على عدد الوحدات الذى يحقق أقصى ربح ممكن نتبع الخطوات التالية :

1) نوجد المشتقة الأولى :

$$R'(x) = 40 - 0.1x$$

2) نضع المشتقة الأولى = صفر :

$$40 - 0.1x = 0 \quad \Rightarrow \quad 40 = 0.1x$$

$$x = \frac{40}{0.1} = 400$$

أقصى ربح ممكن يتحقق عند انتاج 400 وحدات .

■ ويكون أقصى ربح ممكن يساوى :

$$R(x) = 40x - 0.05x^2 - 500$$

$$R(400) = 40(400) - 0.05(400)^2 - 500$$

$$R(400) = 7500$$

CARVEN