④ التكامل

■ قواعد التكامل :

تكامل الدالة	الدالة
1) $\int a = ax + c$	
2) $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	
3) $\int ax^n = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	
4) $\int (ax \pm b)^n = \frac{(ax \pm b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$	بشرط أن تكون الدالة فى القوس من الدرجة الأولى
5) $\int e^{(\text{دالة})} = \frac{e^{(\text{دالة})}}{\text{تفاضل الأس}} + c$	
6) $\int e^{(ax \pm b)} = \frac{e^{(ax \pm b)}}{a} + c$	بشرط أن تكون الدالة فى الأس من الدرجة الأولى
7) $\int \frac{1}{ax \pm b} = \frac{1}{a}\text{Ln}(ax \pm b) + c$	بشرط أن تكون الدالة فى المقام من الدرجة الأولى
8) $\int \frac{\text{البسط تفاضل المقام}}{\text{المقام}} = \text{Ln}(\text{المقام}) + c$	

ثوابت

1) $\int e^x = e^x + c$

2) $\int \frac{1}{x} = \int x^{-1} = \text{Ln}(x) + c$

9) تكامل مجموع أو طرح مجموعة من الدوال

= مجموع أو طرح تكاملات هذه الدوال

10) لا توجد قاعدة محددة لتكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمة دالتين ، ولكن :

■ فى تكامل حاصل ضرب دالتين نحاول فك الأقواس أو ضرب الدوال فى بعضها (أن أمكن) .

■ فى تكامل خارج قسمة دالتين نحاول تبسيط البسط أو المقام أو الاثنين باستخدام التحليل (أن أمكن) .

■ طرق التكامل ■

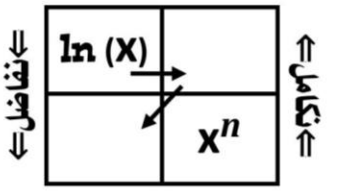
① التكامل بالتجزئ :

إذا كان التكامل على الصورة $\int x^n \ln(x) \, . \, dx$

1) نفرض أن :

الدالة الأولى = $\ln(x)$

الدالة الثانية = x^n



2) نطبق قاعدة القاعدة التالية :

$$\int \text{دالة} \times \text{دالة} = \text{الأولى كما هى} \times \int \text{تكامل الثانية} - \text{تفاضل الأولى} \times \text{تكامل الثانية}$$

② التكامل بالجدول :

إذا كان التكامل على الصورة $\int x^n e^x \, . \, dx$

الاشارة	الدالة الاولى (نفاضل)	الدالة الثانية (تكامل)
+	x^n	e^x
-	ونقوم باشتقاقها عدة مرات ونتوقف عندما تصبح المشتقة = صفر .	ونقوم بايجاد تكاملها عدة مرات ونتوقف عندما تصبح المشتقة المقابلة = صفر .
+		

③ التكامل بالتعويض :

يستخدم التكامل بالتعويض فى الحالات التالية :

1) $\int (\text{دالة}) \times (\text{تفاضل الدالة أو قريب منه}) = \frac{(\text{دالة})^2}{2} + c$

2) $\int (\text{دالة})^n \times (\text{تفاضل الدالة أو قريب منه}) = \frac{(\text{دالة})^{n+1}}{n+1} + c$

3) $\int e^{(\text{الدالة})} \times (\text{تفاضل الأس أو قريب منه}) = e^{(\text{دالة})} + c$

■ التكامل المحدود :

تكامل عادى $\Rightarrow \int_{\text{حد أدنى}}^{\text{حد أعلى}} f(x) \, . \, dx$

■ بعد التكامل هنعوض مرة بـ (الحد الأعلى) ، ونعوض مرة تانية بـ (الحد الأدنى) والفرق بينهما هو ناتج التكامل .

CARVEN

تمارين من امتحانات سابقة

تمرين 1 أوجد التكاملات التالية : **مارس 2021**

❶ $\int (x^3+2x^2-5x)\,.dx$

A) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+c$ B) $\frac{x^4}{3}+\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+c$

C) $\frac{x^4}{3}+\frac{2x^3}{9}-5x^2+c$ D) لا شئ مما سبق

❷ $\int (x^3+\frac{x^2}{2}+2)\,.dx$

A) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}+2x+c$ B) $\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{2}+2x+c$

C) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+2x+c$ D) لا شئ مما سبق

❸ $\int (\sqrt{x^3}+\frac{x^2}{2}+3)\,.dx$

A) $\frac{\sqrt{x^5}}{2}+\frac{x^3}{6}+3x+c$ B) $\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+\frac{x^3}{6}+3x+c$

C) $\frac{\sqrt{x^5}}{5}+\frac{x^3}{6}+3x+c$ D) لا شئ مما سبق

❹ $\int (\frac{\sqrt{x^3}}{2}+x^2-3)\,.dx$

A) $\frac{\sqrt{x^5}}{5}+\frac{x^3}{3}-3x+c$ B) $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-3x+c$

C) $\frac{\sqrt{x^5}}{3}+\frac{x^3}{3}-3x+c$ D) لا شئ مما سبق

حل تمرين 1

❶ $\int (x^3+2x^2-5x)\,.dx$

$= \frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+c$

❷ $\int (x^3+\frac{x^2}{2}+2)\,.dx$

$= \int (x^3+\frac{1}{2}x^2+2)\,.dx$

$= \frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]+2x+c = \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}+2x+c$

❸ $\int (\sqrt{x^3}+\frac{x^2}{2}+3)\,.dx$

$= \int (x^{3/2}+\frac{1}{2}x^2+3)\,.dx$

$= \frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]+3x+c$

$= \frac{2x^{5/2}}{5}+\frac{x^3}{6}+3x+c = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}+\frac{x^3}{6}+3x+c$

❸ $\int (\frac{\sqrt{x^3}}{2}+x^2-3)\,.dx$

$= \int (\frac{1}{2}x^{3/2}+x^2-3)\,.dx$

$= \frac{1}{2}[\frac{x^{5/2}}{5/2}]+\frac{x^3}{3}-3x+c$

$= \frac{x^{5/2}}{5}+\frac{x^3}{3}-3x+c = \frac{\sqrt{x^5}}{5}+\frac{x^3}{3}-3x+c$

تمرين 2 أوجد التكاملات التالية : **مايو 2005**

1) $\int (4x^3+3x^2+2x)\,.dx$

2) $\int (5x^3+3x^2-7)\,.dx$

3) $\int (5x^3+e^x+4)\,.dx$

4) $\int (4x^2+x+e^x)\,.dx$

5) $\int 3x^2e^{x^3}\,.dx$ 6) $\int 4x^3e^{x^4}\,.dx$

7) $\int x\,e^{x^2}\,.dx$ 8) $\int x\,e^x\,.dx$

حل تمرين 2

❶ $\int (4x^3+3x^2+2x)\,.dx$

$= \frac{4x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+c$

$= x^4+x^3+x^2+c$

❷ $\int (5x^3+3x^2-7)\,.dx$

$= \frac{5x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-7x+c$

$= \frac{5}{4}x^4+x^3-7x+c$

$= 1.25\,x^4+x^3-7x+c$

CARVEN

② $\int x^5 (x^6+2)^2 . dx$

A) $\frac{(x^6+2)^3}{3}+c$ B) $\frac{(x^6+2)^3}{18}+c$

C) $Ln\frac{(x^6+2)^3}{18}+c$ D) لا شئ مما سبق

③ $\int x^2 (x^3+1)^2 . dx$

A) $\frac{(x^3+1)^3}{3}+c$ B) $\frac{(x^3+1)^3}{9}+c$

C) $Ln\frac{(x^3+1)^3}{9}+c$ D) لا شئ مما سبق

④ $\int x^2 \sqrt{x^3+1} . dx$

A) $\frac{1}{2}\sqrt{(x^3+1)^4}+c$ B) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+c$

C) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+1)^3}+c$ D) لا شئ مما سبق

⑤ $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} . dx$

A) $\frac{(2x^3+2)^3}{2}+c$ B) $Ln\frac{x^3+2x}{2}+c$

C) $Ln(x^3+2x)+c$ D) لا شئ مما سبق

⑥ $\int \frac{4x^3+2}{x^4+2x} . dx$

A) $\frac{(x^4+2x)^2}{2}+c$ B) $Ln\frac{x^4+2x}{2}+c$

C) $Ln(x^4+2x)+c$ D) لا شئ مما سبق

حل تمرين 3 مايو 2021

① $\int x^3 (x^4+1) . dx$

الدالة الأولى قريبة من تفاضل ما بداخل القوس

$= \frac{1}{4}\int 4x^3 (x^4+1) . dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{(x^4+1)^2}{2}\right]+c = \frac{(x^4+1)^2}{8}+c$

الدالة الأولى أصبحت تفاضل ما بداخل القوس

③ $\int (5x^3+e^x+4) . dx$

$= \frac{5x^4}{4}+e^x+4x+c$

$= \frac{5}{4}x^4+e^x+4x+c$

④ $\int (4x^2+x+e^x) . dx$

$= \frac{4x^3}{3}+x^2+e^x+c$

$= \frac{4}{3}x^3+x^2+e^x+c$

⑤ $\int 3x^2 e^{x^3} . dx = e^{x^3}+c$

الدالة الأولى تفاضل أس الدالة الثانية

⑥ $\int 4x^3 e^{x^4} . dx = e^{x^4}+c$

الدالة الأولى تفاضل أس الدالة الثانية

⑦ $\int x\, e^{x^2} . dx$

الدالة الأولى قريبة من تفاضل أس الدالة الثانية

$= \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} . dx = \frac{1}{2} e^{x^2}+c$

الدالة الأولى أصبحت تفاضل أس الدالة الثانية

⑧ $\int x\, e^x . dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالجداول

الاشارة	الدالة الاولى (نفاضل ⇓)	الدالة الثانية (تكامل ⇓)
+	x	e^x
-	1	e^x
+	0	

$\int x\, e^x . dx = x\, e^x - e^x + c$

تمرين 3 أوجد التكاملات التالية :

① $\int x^3 (x^4+1) . dx$

A) $\frac{(x^4+1)^2}{8}+c$ B) $\frac{(x^4+1)^2}{2}+c$

C) $Ln\frac{(x^4+1)^2}{8}+c$ D) لا شئ مما سبق

حل تمرين 4

❶ $\int x \ln(x) \, . \, dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالتجزئ

1) نفرض أن :

الدالة الأولى = $\ln(x)$

الدالة الثانية = x

$\ln(x)$ ← تفاضل	$\frac{1}{2}x^2$ ⇑ تكامل
$\frac{1}{x}$	x

2) نطبق القاعدة التالية :

$$\int \text{دالة} \times \text{دالة} = \text{الأولى كما هى} \times \int \text{تكامل الثانية} - \text{تفاضل الأولى} \times \text{تكامل الثانية}$$

$$\int x \ln(x) \, . \, dx$$

$$= \ln(x) \, . \, \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{1}{x}\right) . \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x \, . \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$$

---

❷ $\int x^5 \ln(x) \, . \, dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالتجزئ

1) نفرض أن :

الدالة الأولى = $\ln(x)$

الدالة الثانية = x^5

$\ln(x)$ ← تفاضل	$\frac{1}{6}x^6$ ⇑ تكامل
$\frac{1}{x}$	x^5

2) نطبق القاعدة التالية :

$$\int \text{دالة} \times \text{دالة} = \text{الأولى كما هى} \times \int \text{تكامل الثانية} - \text{تفاضل الأولى} \times \text{تكامل الثانية}$$

$$\int x^5 \ln(x) \, . \, dx$$

$$= \ln(x) . \frac{1}{6}x^6 - \int \frac{1}{6}x^6 \left(\frac{1}{x}\right) . \, dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \ln(x) - \int \frac{1}{6}x^5 \, . \, dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \ln(x) - \frac{1}{36}x^6 + c$$

تابع الحل >>>

❷ $\int x^5 (x^6+2)^2 \, . \, dx$

الدالة الأولى قريبة من تفاضل ما بداخل القوس

$$= \frac{1}{6} \int 6x^5 (x^6+2)^2 \, . \, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(x^6+2)^3}{3}\right] + c = \frac{(x^6+2)^3}{18} + c$$

الدالة الأولى أصبحت تفاضل ما بداخل القوس

---

❸ $\int x^2 (x^3+1)^2 \, . \, dx$

الدالة الأولى قريبة من تفاضل ما بداخل القوس

$$= \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+1)^2 \, . \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+1)^3}{3}\right] + c = \frac{(x^3+1)^3}{9} + c$$

الدالة الأولى أصبحت تفاضل ما بداخل القوس

---

❹ $\int x^2 \sqrt{x^3+1} \, . \, dx$

الدالة الأولى قريبة من تفاضل ما بداخل القوس

$$= \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+1)^{1/2} \, . \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+1)^{3/2}}{3/2}\right] + c = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3} + c$$

الدالة الأولى أصبحت تفاضل ما بداخل القوس

---

❺ $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} \, . \, dx = \ln(x^3+2x) + c$

---

❻ $\int \frac{4x^3+2}{x^4+2x} \, . \, dx = \ln(x^4+2x) + c$

تمرين 4 أوجد التكاملات التالية : مايو 2005

1) $\int x \ln(x) \, . \, dx$ 2) $\int x^5 \ln(x) \, . \, dx$

3) $\int x^2 \ln(x) \, . \, dx$ 4) $\int x^3 \ln(x) \, . \, dx$

5) $\int_0^1 (5x^2+2x)^3 (5x+1) \, . \, dx$

6) $\int x e^{4x} \, . \, dx$ 7) $\int x e^{3x} \, . \, dx$

8) $\int x^2 e^x \, . \, dx$

CARVEN

3 $\int x^2 \ln(x) \, dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالتجزئ

1) نفرض أن :

الدالة الأولى = $\ln(x)$

الدالة الثانية = x^2

$\ln(x)$	$\frac{1}{3}x^3$
$\frac{1}{x}$	x^2

(تفاضل ⇐ ⇒ تكامل)

2) نطبق القاعدة التالية :

$$\int \text{دالة} \times \text{دالة} = \text{الأولى كما هى} \times \text{تكامل الثانية} - \int \text{تكامل الثانية} \times \text{تفاضل الأولى}$$

$$\int x^2 \ln(x) \, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + c$$

---

4 $\int x^3 \ln(x) \, dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالتجزئ

1) نفرض أن :

الدالة الأولى = $\ln(x)$

الدالة الثانية = x^3

$\ln(x)$	$\frac{1}{4}x^4$
$\frac{1}{x}$	x^3

(تفاضل ⇐ ⇒ تكامل)

2) نطبق القاعدة التالية :

$$\int \text{دالة} \times \text{دالة} = \text{الأولى كما هى} \times \text{تكامل الثانية} - \int \text{تكامل الثانية} \times \text{تفاضل الأولى}$$

$$\int x^3 \ln(x) \, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{1}{4}x^4 - \int \frac{1}{4}x^4 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \int \frac{1}{4}x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c$$

---

5 $\int_0^1 (5x^2 + 2x)^3 (5x + 1) \, dx$

■ الحل أثناء حصة المراجعة

---

6 $\int x \, e^{3x} \, dx$

■ الحل بأستخدام التكامل بالجداول

الاشارة	الدالة الاولى (نفاضل ⇓)	الدالة الثانية (تكامل ⇓)
+	x	e^{3x}
-	1	$\frac{1}{3}e^{3x}$
+	0	$\frac{1}{9}e^{3x}$

$$\int x \, e^{3x} \, dx = \frac{1}{3}x \, e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$$

---

7 $\int x \, e^{4x} \, dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالجداول

الاشارة	الدالة الاولى (نفاضل ⇓)	الدالة الثانية (تكامل ⇓)
+	x	e^{4x}
-	1	$\frac{1}{4}e^{4x}$
+	0	$\frac{1}{16}e^{4x}$

$$\int x e^{4x} \, dx = \frac{1}{4}x \, e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + c$$

---

8 $\int x^2 e^x \, dx$

■ الحل باستخدام التكامل بالجداول

الاشارة	الدالة الاولى (نفاضل)	الدالة الثانية (تكامل)
+	x^2	e^x
-	$2x$	e^x
+	2	e^x
-	0	e^x

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$= e^x \left[x^2 - 2x + 2 \right] + c$$

CARVEN