الفصل الأول : الدالـــة

أولاً : الدالة

■ **الدالـــة :** هى علاقة أو قاعدة رياضية تربط بين متغيرين الأول متغير مستقل (x) والآخر متغير تابع (y) .

ويتم التعبير عنها رياضياً كما يلى : $y = f(x)$

نطاق أو مجال الدالة	النطاق المرافق أو مدى الدالة
■ تسمى مجموعة القيم التى يأخذها المتغير (x) .	■ تسمى مجموعة القيم التى تعبر عن المتغير (y) والناتجة من التعويض فى الدالة بقيم المتغير (x) .

ملحوظة ليست كل علاقة بين (x) و (y) تعتبر دالة ولكن كل دالة علاقة.

وحتى تعتبر العلاقة دالة يجب توافر الشرط التالى :

كل قيمة من قيم (x) تعطى قيمة وحيدة لـ (y)

تمرين (١) إذا كانت :

$y = 2x + 3$, $x = \{1, 2, 3\}$

هل العلاقة السابقة دالة أم ليست دالة ؟

حل تمرين (١)

- $x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 3 = 5$
- $x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 3 = 7$
- $x = 3 \Rightarrow y = 2(3) + 3 = 9$

العلاقة تعتبر دالة

نطاق أو مجال الدالة	النطاق المرافق أو مدى الدالة
$x = \{1, 2, 3\}$	$y = \{5, 7, 9\}$

تمرين (٢) هل العلاقة التالية دالة أم ليست دالة :

$y = \sqrt{x}$, $x = \{4, 9, 16\}$

حل تمرين (٢)

- $x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = \pm 2$
- $x = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9} = \pm 3$
- $x = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16} = \pm 4$

العلاقة ليست دالة

■ لأن كل قيمة من قيم (x) أعطت قيمتين لـ (y) إحداهما موجبة والأخرى سالبة .

أنواع الدوال

الدوال الجبرية	الدوال غير الجبرية
■ هى الدوال القابلة لإجراء العمليات الجبرية على متغيراتها المستقلة .	■ هى الدوال غير القابلة لإجراء العمليات الجبرية على متغيراتها المستقلة .
■ وتشمل : ١) الدوال كثيرة الحدود . ٢) الدوال القياسية . ٣) الدوال غير القياسية .	■ وتشمل : ١) الدوال الأسية . ٢) الدوال اللوغارتمية . ٣) الدوال المثلثية . ٤) الدوال الزائدية .

■ الدوال الجبرية ■

١) الدوال كثيرة الحدود :

■ تسمى الدالة كثيرة الحدود إذا كانت على الصورة التالية :

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث أن : a_n ، ... ، a_2 ، a_1 ، a_0 معاملات الدالة

n : عدد صحيح موجب يحدد درجة كثيرة الحدود

ملحوظة درجة كثيرة الحدود تساوى أكبر أس لـ (x)

■ وتأخذ الدالة كثيرة الحدود عدة أشكال منها :

١) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

٢) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

٣) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

ويوجد كثيرات حدود حتى الدرجة n كما فى الصورة العامة

■ **الدالة من الدرجة الأولى (الدالة الخطية)**

هى دالة كثيرة الحدود يكون فيها أكبر أس للمتغير (x) هو الأس (1). ويتم كتابتها كما يلى :

$$y = a_1x + a_0$$

مثال:

$$y = 2x + 4 \quad , \quad y = 3x - 1$$

■ **الدالة من الدرجة الثانية (الدالة التربيعية)**

هى دالة كثيرة الحدود يكون فيها أكبر أس للمتغير (x) هو الأس (2). ويتم كتابتها كما يلى :

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

مثال:

$$y = 2x^2 + 3x + 1 \quad , \quad y = 4x^2 - 2x + 3$$

■ **الدالة من الدرجة الثالثة (الدالة التكعيبية)**

هى دالة كثيرة الحدود يكون فيها أكبر أس للمتغير (x) هو الأس (3). ويتم كتابتها كما يلى :

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

مثال:

$$y = x^3 + 3x + 1 \quad , \quad y = 2x^3 + 2x^2 - 2$$

---

٢) الدوال القياسية :

هى دالة على صورة خارج قسمة دالتين كثيرات الحدود .

وتأخذ الشكل التالى :

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث أن : $f(x)$ ، $g(x)$ دوال كثيرة الحدود

مثال:

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + x} \quad , \quad y = \frac{2x^3 + 1}{2x - 3}$$

٣) الدوال غير القياسية :

هى دالة على صورة خارج قسمة دالتين أحداهما على الأقل ليست دالة كثيرة الحدود . وتأخذ الشكل التالى :

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث أن :

$f(x)$ ، $g(x)$ أحداهما على الأقل ليست دالة كثيرة الحدود

مثال:

$$y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} \quad , \quad y = \frac{e^x + 1}{\ln x}$$

■ الدوال غير الجبرية ■

١) الدالة الأسية :

هى دالة يظهر فيها المتغير (x) على شكل أس .

وتأخذ أحد الصور التالية :

$y = A^x$	$y = e^x$
حيث أن:	**حيث أن:**
(A) أساس الدالة	(e) أساس الدالة
($a \neq 0, 1$)	($e = 2.718$)

---

٢) الدالة اللوغاريتمية :

هى دالة تأخذ أحد الصور التالية :

$y = \log_a x$	$y = \ln x$
حيث أن:	**حيث أن:**
($a \neq 0$)	$\log_e x = \ln x$

---

٣) الدوال المثلثية :

هى دالة تأخذ أحد الصور التالية :

1) $y = \sin x$ ⇒ دالة جيب الزاوية

2) $y = \cos x$ ⇒ دالة جيب تمام الزاوية

3) $y = \tan x$ ⇒ دالة ظل الزاوية

CARVEN

٤) الدوال الزائدية :

هى دوال فى الدوال الاسية وتأخذ أحد الصور التالية :

$$1)\ y = \text{Sinh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2)\ y = \text{Cosh}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3)\ y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

■ الدالة الزوجية و الدالة الفردية ■

إذا كانت : $y = f(x)$

١) نستبدل (x) بـ $(-x)$ فى الدالة الأصلية .

٢) نقارن بين نتيجة الخطوة السابقة وبين الدالة الأصلية .

■ تكون دالة زوجية عندما : $f(-x) = f(x)$

■ تكون دالة فردية عندما : $f(-x) = -f(x)$

تمرين (٣) اختبر الدوال التالية من حيث كونها زوجية أم فردية :

$1)\ y = x^2 + 4$

$2)\ y = x^3 + 3x$

$3)\ y = 3x^2 + x - 1$

حل تمرين (٣)

$$1)\ y = f(x) = x^2 + 4$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4$$

$\because f(-x) = f(x) \Rightarrow$ ∴ الدالة زوجية

$$2)\ y = f(x) = x^3 + 3x$$

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)$$

$$f(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x)$$

$\because f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ ∴ الدالة فردية

$$3)\ y = f(x) = 3x^2 + x - 1$$

$$f(-x) = 3(-x)^2 + (-x) - 1$$

$$f(-x) = 3x^2 - x - 1$$

$\because f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

■ الدالة المتزايدة و المتناقصة ■

إذا كانت : $y = f(x)$

١) نعوض فى الدالة بقمتين لـ (x) بشرط أن تكون :

قيمة (x_2) ≺ قيمة (x_1)

٢) نقارن بين نتائج الخطوة السابقة.

■ تكون دالة متزايدة إذا كان : $f(x_2) \succ f(x_1)$

■ تكون دالة متناقصة إذا كان : $f(x_2) \prec f(x_1)$

تمرين (٤) اختبر الدوال التالية من حيث كونها متزايدة أم متناقصة :

$1)\ y = 2x + 1$ $\quad$ $2)\ y = 4 - 2x$

حل تمرين (٤)

$$1)\ y = f(x) = 2x + 1$$

$x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$x_2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = f(3) = 2(3) + 1 = 7$

$\because f(x_2) \succ f(x_1) \Rightarrow$ ∴ الدالة متزايدة

$$2)\ y = f(x) = 4 - 2x$$

$x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = f(1) = 4 - 2(1) = 5$

$x_2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = f(3) = 4 - 2(3) = -2$

$\because f(x_2) \prec f(x_1) \Rightarrow$ ∴ الدالة متناقصة

تمثيل الدالة بيانياً

١) الدالة من الدرجة الأولى :

$$y = a_1x + a_0$$

■ يمثلها بيانيا خط مستقيم ، حيث أن :

a_0 : يمثل الجزء المقطوع من محور الصادات (Y) .

a_1 : يمثل ميل الخط المستقيم .

ملاحظات

١

إذا كان	إذا كان
$a_0 = 0$	$a_0 \neq 0$
الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)	الخط المستقيم لا يمر بنقطة الأصل بل يقطع محور الصادات (Y) عند النقطة (a_0 ، ٠) .

٢

إذا كان	إذا كان
$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
ميل الخط المستقيم يكون سالب ويصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (X) .	ميل الخط المستقيم يكون موجب ويصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (X) .

الخلاصة الدالة من الدرجة الأولى يلزم لتمثيلها نقطتين إحداهما نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات ونحصل عليها بالتعويض فى الدالة عن ($X = 0$) و أى نقطة أخرى .

٢) الدالة من الدرجة الثانية :

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

■ يمثلها بيانيا منحنى له نقطة رأس قد تمر بنقطة الأصل وقد لا تمر بنقطة الأصل ، وله فرعان متماثلان حول خط رأسى قد يكون محور الصادات (Y) أو خط عمودى يوازيه .

ملاحظات

١

إذا كان	إذا كان
$a_0 = 0$	$a_0 \neq 0$
المنحنى يمر عند رأسه بنقطة الأصل (٠ ، ٠)	المنحنى لا يمر عند رأسه بنقطة الأصل ولكن يمر بالنقطة (a_0 ، ٠) .

٢

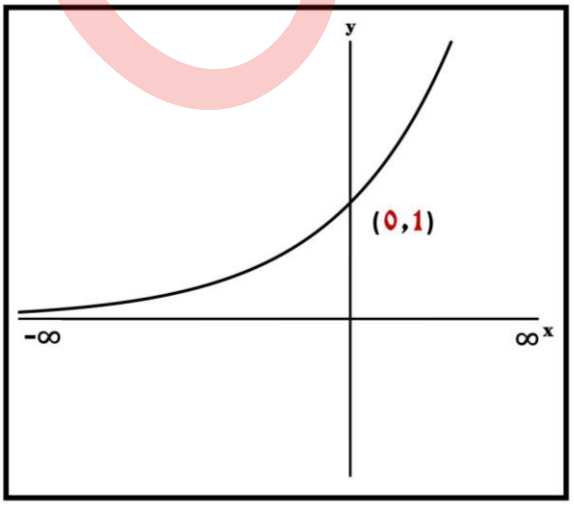
إذا كان	إذا كان
$a_1 = 0$	$a_1 \neq 0$
المنحنى يتماثل حول محور الصادات (Y) .	المنحنى لا يتماثل حول محور الصادات (Y) ولكن يتماثل حول خط يوازى محور الصادات .

٣

إذا كان	إذا كان
$a_2 < 0$	$a_2 > 0$
المنحنى مفتوح لأسفل ويقع أسفل نقطة الرأس .	المنحنى مفتوح لأعلى ويقع فوق نقطة الرأس .

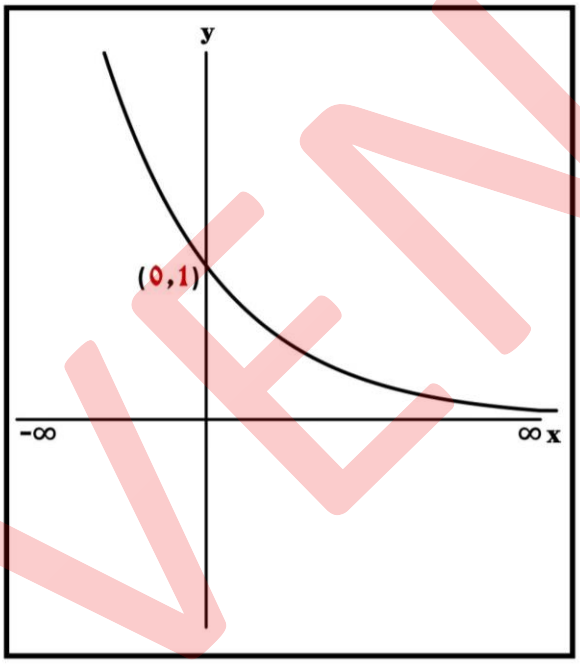
٣) الدالة الأسية : $y = e^x$

■ يمثلها بيانيا منحنى يمر بالنقطة (0,1) ويلتقى بالمحور (X) عند ($-\infty$) ، وذلك عندما تكون ($y = 0$) .



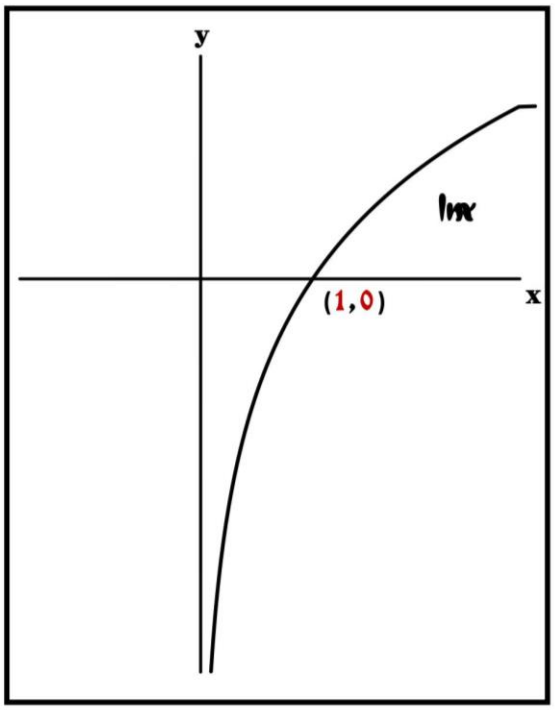
٤) الدالة الأسية : $y = e^{-x}$

■ يمثلها بيانيا منحنى يمر بالنقطة (1 , 0) ويلتقى بالمحور (x) عند (∞) ، وذلك عندما تكون (y = 0) .



٥) الدالة اللوغاريتمية : $y = \text{Ln}x$

■ يمثلها بيانيا منحنى عكس شكل منحنى الدالة الأسية ويمر بالنقطة (1 , 0) .



أسئلة من امتحانات سابقة

1) $f(x) = 12 - 6x^2 + 3\sqrt{x}$

A) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

B) دالة كثيرة حدود من الدرجة 0.5

C) دالة ليست كثيرة حدود

2) $f(x) = \text{Log } x^2 + 3x$

A) دالة لوغاريتمية

B) دالة جبرية غير قياسية

C) دالة ليست كثيرة حدود

3) أى من الازواج المرتبة التالية يمثل دالة

A) (3,9) , (3,19) B) (7,4) , (7,5)

C) (8,2) , (-8,5) D) لا شئ مما سبق

A) (3,9) , (3,19) ⇛ لا يمثل دالة

B) (7,4) , (7,5) ⇛ لا يمثل دالة

C) (8,2) , (-8,5) ⇛ يمثل دالة

4) أى من الازواج المرتبة التالية لا يمثل دالة

A) (3,9) , (-3,9) B) (7,5) , (3,4)

C) (8,2) , (8,5) D) لا شئ مما سبق

A) (3,9) , (-3,9) ⇛ يمثل دالة

B) (7,5) , (3,4) ⇛ يمثل دالة

C) (8,2) , (8,5) ⇛ لا يمثل دالة

■ إذا كانت : $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$ ميد ترم ٢٠٢٠

5) $f(1) = 3$

A) 6 B) 0 C) غير معرفة D) خلاف ذلك

6) نوع بسط هذه الدالة

A) دالة جبرية قياسية B) من الدرجة الثانية

C) جبرية غير قياسية D) خلاف ذلك

CARVEN

■ إذا كانت : $f(X)=\frac{X^2+3X+2}{X^2-1}$ ميد ترم ٢٠٢٠

7) $f(1)=$

A) 6 B) ٥ C) غير معرفة D) خلاف ذلك

8) نوع هذه الدالة

A) دالة جبرية قياسية B) من الدرجة الثانية

C) جبرية غير قياسية D) خلاف ذلك

9) إذا كانت $f(X)=a+a^3X^2$ فأن الدالة $f(X)$ دالة من الدرجة ..... فى X

الثابتة D) الثالثة C) الأولى B) الثانية A)

10) إذا كانت $f(X)=a^2+aX^3$ فأن الدالة $f(X)$ دالة من الدرجة ..... فى X

الثابتة D) الثالثة C) الأولى B) الثانية A)

11) إذا كانت $f(X)=a^2+aX$ فأن الدالة $f(X)$ دالة من الدرجة ..... فى X

الثابتة D) الثالثة C) الأولى B) التربيعية A)

12) إذا كانت $f(X)=b+aX$ فأن الدالة $f(X)$ دالة من الدرجة ..... فى X

الثابتة D) الثالثة C) الأولى B) التربيعية A)

13) المنحنى الذى له نقطة رأس وفرعان متماثلان حول خط رأسى يكون لكثيرة حدود من الدرجة

الرابعة D) الثالثة C) الأولى B) الثانية A)

14) فى الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية إذا كانت $a_0=0, a_1=0$ فأن منحنى الدالة

A) يتماثل حول محور الصادات

B) يمر بنقطة الأصل عند رأسه

C) يتماثل حول خط يوازى محور الصادات

D) A,B

15) فى الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية إذا كانت $a_0\neq 0, a_1\neq 0$ فأن منحنى الدالة

A) لا يتماثل حول محور الصادات

B) يمر بنقطة عند رأسه غير نقطة الأصل

C) يتماثل حول خط يوازى محور الصادات

D) كل ما سبق

16) فى الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تكون رأس المنحنى لأسفل إذا كان

A) $a_2>0$ B) $a_2<0$

C) $a_2=0$ D) لا شئ مما سبق

17) فى الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تكون رأس المنحنى لأعلى إذا كان

A) $a_2>0$ B) $a_2<0$

C) $a_2=0$ D) لا شئ مما سبق

18) الدالة التى يمثلها منحنى يمر بالنقطة (0,1) ويلتقى بالمحور الافقى عند (∞) وذلك عندما تكون قيمة المتغير التابع تساوى صفر تسمى .....

A) e^{∞} B) e^{-X} C) e^{X} D) خلاف ذلك

19) الدالة التى يمثلها منحنى يمر بالنقطة (0,1) ويلتقى بالمحور الافقى عند (-∞) وذلك عندما تكون قيمة المتغير التابع تساوى صفر تسمى .....

A) e^{∞} B) e^{-X} C) e^{X} D) خلاف ذلك

20) الدالة $y=\frac{e^X+\ln(X)}{X+2}$ تعتبر دالة

A) قياسية B) غير قياسية C) الأولى D) الثانية

CARVEN