الباب الثالث

بعض الأساليب والطرق والنماذج الكمية المستخدمة فى التنبؤ

١) نموذج الانحدار الخطى البسيط

الصورة البديله: $\hat{Y} = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X - \bar{X})$

الصورة الأساسيه: $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

■ تقدير معالم نموذج الانحدار الخطى البسيط :

١) نقدر ($\hat{\beta}_1$) بأحدى الصيغ التالية :

الصيغة الأولى

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - [\sum X]^2}$$

الصيغة الثانية

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

حيث أن : $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$ $\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$

الصيغة الثالثة

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX}$$

حيث أن :

$$SXY = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}$$

$$SXX = \sum X^2 - \frac{[\sum X]^2}{n}$$

٢) نقدر ($\hat{\beta}_0$) بالعلاقة : $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$

■ تقدير الخطأ أو البواقى $\hat{\varepsilon}_i = Y - \hat{Y}$

حيث أن :

$\hat{\varepsilon}_i$ الأخطاء أو البواقى

$\hat{Y}$ القيم التوفيقية

Y القيم الفعلية أو المعطاه

فيكون : $\sum (Y - \hat{Y})$ = مجموع البواقى أو الأخطاء

■ بعض مقاييس الخطأ أو البواقى : ⇐ (محاضرة)

١) متوسط الخطأ : $ME = MR$

$$\overset{R}{ME} = \frac{\sum (Y - \hat{Y})}{n}$$

٢) متوسط الخطأ المطلق : $MAE = MAR$

$$\overset{R}{MAE} = \frac{\sum |Y - \hat{Y}|}{n}$$

٣) متوسط مربع الخطأ : $MSE = MSR$

$$\overset{R}{MSE} = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n}$$

■ تقدير خطأ النموذج : $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{MSE}$

حيث أن :

متوسط مربعات الخطأ $S^2 = MSE = \frac{SSE}{n - 2}$

مجموع مربعات الخطأ $SSE = SYY - \hat{\beta}_1 SXY$

مجموع المربعات الكلى $SYY = \sum Y^2 - \frac{[\sum Y]^2}{n}$

تمرين (١) إذا توافرت البيانات التالية :

X	1	2	3	5	9
Y	3	4	7	9	17

المطلوب : ١) استنتاج معادلة الانحدار المقدرة

٢) أحسب القيم التوفيقية والبواقى .

٣) تقدير خطأ النموذج .

حل تمرين (١)

■ استنتاج معادلة الانحدار المقدرة :

الصورة الأساسيه $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

■ ويتم تقدير معالم النموذج كما يلى :

١) نقدر ($\hat{\beta}_1$) بأحدى الصيغ التالية :

الصيغة الأولى

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - [\sum X]^2}$$

■ نكون الجدول التالي :

مربع قيم X (١)×(٢) (٢) (١)

X	Y	XY	X^2
1	3	3	1
2	4	8	4
3	7	21	9
5	9	45	25
9	17	153	81
20	40	230	120

■ نوجد قيمة $(\hat{\beta}_1)$ بالتعويض في العلاقة :

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{(5 \times 230) - (20 \times 40)}{(5 \times 120) - (20)^2} = \frac{350}{200} = 1.75$$

الصيغة الثانية

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

■ نوجد الوسط الحسابي $(\bar{X})$ و $(\bar{Y})$ كما يلي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{20}{5} = 4 \quad \| \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

■ نكون الجدول التالي :

مربع قيم (٣) (٣)×(٤) Y - 8 X - 4 (٢) (١)

X	Y	$X-\bar{X}$	$Y-\bar{Y}$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$
1	3	-3	-5	15	9
2	4	-2	-4	8	4
3	7	-1	-1	1	1
5	9	1	1	1	1
9	17	5	9	45	25
20	40			70	40

■ نوجد قيمة $(\hat{\beta}_1)$ بالتعويض في العلاقة :

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{70}{40} = 1.75$$

الصيغة الثالثة

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX}$$

حيث أن :

$$SXY = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}$$

$$SXX = \sum X^2 - \frac{[\sum X]^2}{n}$$

■ نكون الجدول التالي :

مربع قيم X (١)×(٢) (٢) (١)

X	Y	XY	X^2
1	3	3	1
2	4	8	4
3	7	21	9
5	9	45	25
9	17	153	81
20	40	230	120

■ نوجد قيمة $(\hat{\beta}_1)$ بالتعويض في العلاقات السابقة :

$$SXY = 230 - \frac{20 \times 40}{5} = 70$$

$$SXX = 120 - \frac{(20)^2}{5} = 40$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{70}{40} = 1.75$$

٢) نقدر $(\hat{\beta}_0)$ بالعلاقة : $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$

$$\therefore \hat{\beta}_0 = 8 - (1.75 \times 4) = 1$$

■ فتكون معادلة الانحدار : في الصورة الأساسية

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

الصورة البديله $\hat{Y} = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X - \bar{X})$

■ فتكون معادلة الانحدار : باستخدام التقديرات السابقة

$$\hat{Y} = 8 + 1.75 (X - 4)$$

■ **حساب القيم التوفيقية (المتوقعة) والبواقى :**

$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

١) باستخدام الصورة الأساسيه :

(١) X	(٢) Y	(٣) $\hat{Y} = 1 + 1.75\,X$	(٣) - (٢) $Y - \hat{Y}$
1	3	$= 1 + (1.75 \times 1) = 2.75$	0.25
2	4	$= 1 + (1.75 \times 2) = 4.5$	-0.5
3	7	$= 1 + (1.75 \times 3) = 6.25$	0.75
5	9	$= 1 + (1.75 \times 5) = 9.75$	-0.75
9	17	$= 1 + (1.75 \times 9) = 16.75$	0.25
20	40	40	

٢) باستخدام الصورة البديله :

(١) X	(٢) Y	(٣) $\hat{Y} = 8 + 1.75\,(X - 4)$	(٣) - (٢) $Y - \hat{Y}$
1	3	$= 8 + 1.75\,(1-4) = 2.75$	0.25
2	4	$= 8 + 1.75\,(2-4) = 4.5$	-0.5
3	7	$= 1 + 1.75\,(3-4) = 6.25$	0.75
5	9	$= 8 + 1.75\,(5-4) = 9.75$	-0.75
9	17	$= 8 + 1.75\,(9-4) = 16.75$	0.25
20	40	40	

■ **تقدير خطأ النموذج :**

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{MSE}$$

حيث أن :

متوسط مربعات الخطأ

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2}$$

مجموع مربعات الخطأ

$$SSE = SYY - \hat{\beta}_1 SXY$$

مجموع المربعات الكلى

$$SYY = \sum Y^2 - \frac{[\sum Y]^2}{n}$$

■ **نكون الجدول التالى :**

(١) X	(٢) Y	(١)×(٢) XY	مربع قيم X X^2	مربع قيم Y Y^2
1	3	3	1	9
2	4	8	4	16
3	7	21	9	49
5	9	45	25	81
9	17	153	81	289
20	40	230	120	444

■ **نوجد خطأ النموذج بالتعويض فى العلاقات السابقة :**

$$\therefore SXY = 230 - \frac{20 \times 40}{5} = 70$$

$$\therefore SYY = 444 - \frac{(40)^2}{5} = 124$$

$$\therefore SSE = 124 - (1.75 \times 70) = 1.5$$

$$\therefore s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{1.5}{5-2} = 0.5$$

فيكون خطأ النموذج : $s = \sqrt{0.5} = 0.707$

تمرين (٢) الجدول التالى يمثل مشاهدات 4 شهور:

X	2	3	5	6
Y	3	1	7	9

فأن :

	(A)	(B)	(C)	(D)
1) SXX =	10	40	18	7.6
2) SYY =	10	40	18	7.6
3) SXY =	10	40	18	7.6
4) SSE =	40	32.4	3.8	7.6
5) s^2 =	40	32.4	3.8	7.6
6) $\hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX}$	5	-2.2	1.8	4
7) $\hat{\beta}_0$ =	5	-2.2	1.8	4

حل تمرين (٢)

نكون الجدول التالي :

(١)	(٢)	(١)×(٢)	مربع قيم X	مربع قيم Y
X	Y	XY	X^2	Y^2
2	3	6	4	9
3	1	3	9	1
5	7	35	25	49
6	9	54	36	81
16	20	98	74	140

■ **نوجد كلا من :**

$$1)\ SXX = \sum X^2 - \frac{[\sum X]^2}{n}$$

$$SXX = 74 - \frac{(16)^2}{4} = 10$$

$$2)\ SYY = \sum Y^2 - \frac{[\sum Y]^2}{n}$$

$$SYY = 140 - \frac{(20)^2}{4} = 40$$

$$3)\ SXY = \sum XY - \frac{[\sum X][\sum Y]}{n}$$

$$SXY = 98 - \frac{(16)(20)}{4} = 18$$

$$4)\ SSE = SYY - \hat{\beta}_1 SXY$$

$$SSE = 40 - (1.8 \times 18) = 7.6$$

$$5)\ s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{7.6}{4-2} = 3.8$$

$$6)\ \hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX} = \frac{1.8}{10} = 1.8$$

$$7)\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{20}{4} - (1.8 \times \frac{16}{4}) = -2.2$$

تمرين (٣)

من عينة حجمها (5) مشاهدات كانت التقديرات والمجاميع التالية :

$\sum (X - \bar{X})^2 = 40$ $\quad \sum (X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = 50$

$SSE = 6.75$ $\quad \bar{X} = 4$ $\quad \bar{Y} = 8$

فأن :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sum (X-\bar{X})^2}$$

	(A)	(B)	(C)	(D)
1) $\hat{\beta}_1 =$	5	2.2	1.25	4
2) $\hat{\beta}_0 =$	5	3	1.8	4
3) $MSE =$	1.5	2.5	2.25	7.6
4) $s =$	1.5	2.5	2.25	7.6

حل تمرين (٣)

$$1)\ \hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2} = \frac{50}{40} = 1.25$$

$$2)\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 8 - (1.25 \times 4) = 3$$

$$3)\ MSE = s^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{6.75}{5-2} = \frac{6.75}{3} = 2.25$$

$$4)\ s = \sqrt{s^2} = \sqrt{MSE} = \sqrt{2.25} = 1.5$$

تمرين (٤)

إذا كان لديك البيانات التالية :

$SXY = 216$ $\quad SXX = 240$ $\quad \bar{X} = 22$ $\quad \bar{Y} = 25$

فأن :

	(A)	(B)	(C)	(D)
1) $\hat{\beta}_1 =$	1.3	0.63	0.90	0.73
2) $\hat{\beta}_0 =$	1.6	5.2	9.73	12.94

حل تمرين (٤)

$$1)\ \hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX} = \frac{1.8}{10} = 0.9$$

$$2)\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 25 - (0.9 \times 22) = 5.2$$