CARVEN 2

تأمين

جداول الحياة (الوفاة)
احتمالات الحياة (الوفاة)

2026

CARVEN
BENHA

رؤية مختلفة دائماً

عزيزى الطالب

بادر بحجز مكانك في مجموعات لشرح جميع أجزاء المنهج
للاستفسار و الحجز =

٠١٠٠٣٤١٠٦١
٠١٢٢٧٥٥٥٠٠٠

عنوان السنتر

بنها : ٨ ش سليمان نصار متفرع من ش كلية التجارة ناصية مكتبة مكة

شبرا الخيمة : شارع المطار ناصية المرجني خلف مدرسة التجارة برج B داخل سنتر الثريا

فرع العبور : أمام باب كلية التجارة الرئيسي

عنوان المكتبة

ش كلية التجارة الرئيسي أمام باب كلية التجارة أمام المسجد مباشرة

إعداد
د/ سلمي أيمن

٣
١٣

جداول الحياة (الوفاة)

■ **تعريف جدول الحياة (الوفاة) :**

هو جدول يمكن بواسطته قياس احتمالات الحياة والوفاة لمجموعة افتراضية أو جيل واقعى من السكان . عن طريق متابعة تناقصهم تدريجيا بسبب الوفاة من لحظة ميلادهم وحتى وفاة آخر فرد منهم .

■ **شكل جدول الحياة (الوفاة) :**

X	I_x	d_x	q_x	p_x
ترمز لعمر او السن بالسنوات	ترمز لعدد الأشخاص الأحياء فى العمر X .	ترمز لعدد الوفيات فى العمر X .	ترمز لاحتمال الوفاة فى العمر X .	ترمز لاحتمال الحياة فى العمر X .

■ **قواعد (علاقات) تكملة جدول الحياة (الوفاة) :**

$$p_x + q_x = 1 \quad (1)$$

$$p_x = 1 - q_x \quad | \quad q_x = 1 - p_x$$

$$d_x = I_x - I_{x+1} \quad (2)$$

$$I_x = I_{x+1} + d_x \quad | \quad I_{x+1} = I_x - d_x$$

$$q_x = \frac{d_x}{I_x} \quad (3)$$

$$d_x = q_x \cdot I_x \quad | \quad I_x = \frac{d_x}{q_x}$$

$$p_x = \frac{I_{x+1}}{I_x} \quad (4)$$

$$I_{x+1} = p_x \cdot I_x \quad | \quad I_x = \frac{I_{x+1}}{p_x}$$

تمرين (١) المطلوب إنشاء جدول الحياة مستخدماً البيانات التالية :

X	40	41	42	43	44	45
I_x	1000	900	700	500	200	100

حل تمرين (١)

■ **يتم وضع الجدول فى الشكل التالى وتسجيل البيانات المتاحة فى مكانها :**

X	I_x	d_x	q_x	p_x
40	1000			
41	900			
42	700			
43	500			
44	200			
45	150			

■ **نكمل الجدول كما يلى :**

عمود ⇐ d_x ⇐ $d_x = I_x - I_{x+1}$

$d_{40} = I_{40} - I_{41} = 1000 - 900 = 100$

$d_{41} = I_{41} - I_{42} = 900 - 700 = 200$

$d_{42} = I_{42} - I_{43} = 700 - 500 = 200$

$d_{43} = I_{43} - I_{44} = 500 - 200 = 300$

$d_{44} = I_{44} - I_{45} = 200 - 150 = 50$

عمود ⇐ p_x ⇐ $p_x = \frac{I_{x+1}}{I_x}$

$p_{40} = \frac{I_{41}}{I_{40}} = \frac{900}{1000} = 0.9$

$p_{41} = \frac{I_{42}}{I_{41}} = \frac{700}{900} = 0.778$

$p_{42} = \frac{I_{43}}{I_{42}} = \frac{500}{700} = 0.714$

$p_{43} = \frac{I_{44}}{I_{43}} = \frac{200}{500} = 0.4$

$p_{44} = \frac{I_{45}}{I_{44}} = \frac{150}{200} = 0.75$

عمود ⇐ q_x ⇐ $q_x = 1 - p_x$

$q_{40} = 1 - p_{40} = 1 - 0.9 = 0.1$

$q_{41} = 1 - p_{41} = 1 - 0.778 = 0.222$

$q_{42} = 1 - p_{42} = 1 - 0.714 = 0.286$

$q_{43} = 1 - p_{43} = 1 - 0.4 = 0.6$

$q_{44} = 1 - p_{44} = 1 - 0.25 = 0.75$

■ فيكون الجدول كما يلى :

X	l_x	d_x	q_x	p_x
40	1000	100	0.1	0.9
41	900	200	0.222	0.778
42	700	200	0.286	0.714
43	500	300	0.6	0.4
44	200	100	0.25	0.75
45	150	---	---	---

تمرين (٢) المطلوب إنشاء جدول الحياة مستخدماً البيانات التالية :

X	20	21	22	23	24
p_x	0.9975	0.9912	0.9899	0.9884	0.9846

وكانت : $l_{20} = 10000$

حل تمرين (٢)

■ يتم وضع الجدول فى الشكل التالى وتسجيل البيانات المتاحة فى مكانها :

X	l_x	d_x	q_x	p_x
20	10000			0.9975
21				0.9912
22				0.9899
23				0.9884
24				0.9846
25				---

■ نكمل الجدول كما يلى :

عمود ⇐ q_x ⇐ $q_x = 1 - p_x$

$q_{20} = 1 - p_{20} = 1 - 0.9975 = 0.0025$

$q_{21} = 1 - p_{21} = 1 - 0.9912 = 0.0088$

$q_{22} = 1 - p_{22} = 1 - 0.9899 = 0.0101$

$q_{23} = 1 - p_{23} = 1 - 0.9884 = 0.0116$

$q_{24} = 1 - p_{24} = 1 - 0.9846 = 0.0154$

عمود ⇐ l_x ⇐ $l_{x+1} = p_x \cdot l_x$

$l_{21} = p_{20} \cdot l_{20} = 10000 \times 0.9975 = 9975$

$l_{22} = p_{21} \cdot l_{21} = 9975 \times 0.9912 = 9887$

$l_{23} = p_{22} \cdot l_{22} = 9887 \times 0.9899 = 9787$

$l_{24} = p_{23} \cdot l_{23} = 9787 \times 0.9884 = 9674$

$l_{25} = p_{24} \cdot l_{24} = 9674 \times 0.9846 = 9525$

عمود ⇐ d_x ⇐ $d_x = l_x - l_{x+1}$

$d_{20} = l_{20} - l_{21} = 10000 - 9975 = 25$

$d_{21} = l_{21} - l_{22} = 9975 - 9887 = 88$

$d_{22} = l_{22} - l_{23} = 9887 - 9787 = 100$

$d_{23} = l_{23} - l_{24} = 9787 - 9674 = 113$

$d_{24} = l_{24} - l_{25} = 9674 - 9525 = 149$

■ فيكون الجدول كما يلى :

X	l_x	d_x	q_x	p_x
20	10000	25	0.0025	0.9975
21	9975	88	0.0088	0.9912
22	9887	100	0.0101	0.9899
23	9787	113	0.0116	0.9884
24	9674	149	0.0154	0.9846
25	9525	---	---	---

تمرين (٣) المطلوب إنشاء جدول الحياة مستخدماً البيانات التالية :

X	I_x	d_x	q_x	p_x
20	100000	250		
21				0.9912
22		998		
23			0.0116	
24				0.9846
25				

حل تمرين (٣)

■ نكمل الجدول كما يلي :

$$I_{21} = I_{20} - d_{20} = 10000 - 250 = 99750$$

$$p_{20} = \frac{I_{21}}{I_{20}} = \frac{99750}{10000} = 0.9975$$

$$q_{20} = 1 - p_{20} = 1 - 0.9975 = 0.0025$$

$$I_{22} = I_{21} \cdot p_{21} = 99750 \times 0.9912 = 98872$$

$$d_{21} = I_{21} - I_{22} = 99750 - 98872 = 878$$

$$q_{21} = 1 - p_{21} = 1 - 0.9912 = 0.0088$$

$$I_{23} = I_{22} - d_{22} = 98872 - 998 = 97874$$

$$p_{22} = \frac{I_{23}}{I_{22}} = \frac{97874}{98872} = 0.9899$$

$$q_{22} = 1 - p_{22} = 1 - 0.9899 = 0.0101$$

$$d_{23} = I_{23} \cdot q_{23} = 97874 \times 0.0116 = 1135$$

$$p_{23} = 1 - q_{23} = 1 - 0.0116 = 0.9884$$

$$q_{24} = 1 - p_{22} = 1 - 0.9846 = 0.0154$$

$$I_{24} = I_{23} \cdot p_{23} = 97874 \times 0.9846 = 96739$$

$$d_{24} = I_{24} \cdot q_{24} = 96739 \times 0.0154 = 1490$$

$$I_{25} = I_{24} - d_{24} = 96739 - 1490 = 95249$$

■ فيكون الجدول كما يلي :

X	I_x	d_x	q_x	p_x
20	100000	250	0.0025	0.9975
21	99750	878	0.0088	0.9912
22	98872	998	0.0101	0.9899
23	97874	1135	0.0116	0.9884
24	96739	1490	0.0154	0.9846
25	95249	---	---	---

تمرين (٤) المطلوب إنشاء جدول الحياة مستخدماً البيانات التالية :

X	I_x	d_x	q_x	p_x
45	10000		0.026	
46			0.028	
47			0.031	
48				0.966
49				0.962
50			0.042	

حل تمرين (٤)

■ نكمل الجدول كما يلي :

$$p_{45} = 1 - q_{45} = 1 - 0.026 = 0.974$$

$$p_{46} = 1 - q_{46} = 1 - 0.028 = 0.972$$

$$p_{47} = 1 - q_{47} = 1 - 0.031 = 0.969$$

$$p_{50} = 1 - q_{50} = 1 - 0.042 = 0.958$$

$$q_{48} = 1 - p_{48} = 1 - 0.966 = 0.034$$

$$q_{49} = 1 - p_{49} = 1 - 0.962 = 0.038$$

$$d_{45} = I_{45} \cdot q_{45} = 10000 \times 0.026 = 260$$

$$I_{46} = I_{45} - d_{45} = 10000 - 260 = 9740$$

$$d_{46} = l_{46} \cdot q_{46} = 9740 \times 0.028 = 273$$

$$l_{47} = l_{46} - d_{46} = 9740 - 273 = 9467$$

$$d_{47} = l_{47} \cdot q_{47} = 9467 \times 0.031 = 293$$

$$l_{48} = l_{47} - d_{47} = 9467 - 293 = 9174$$

$$d_{48} = l_{48} \cdot q_{48} = 9174 \times 0.034 = 312$$

$$l_{49} = l_{48} - d_{48} = 9174 - 312 = 8862$$

$$d_{49} = l_{49} \cdot q_{49} = 8862 \times 0.038 = 337$$

$$l_{50} = l_{49} - d_{49} = 8862 - 337 = 8525$$

$$d_{50} = l_{50} \cdot q_{50} = 8525 \times 0.042 = 358$$

■ فيكون الجدول كما يلى :

X	l_x	d_x	q_x	p_x
45	10000	260	0.026	0.974
46	9740	273	0.028	0.972
47	9467	293	0.031	0.969
48	9174	312	0.034	0.966
49	8862	337	0.038	0.962
50	8525	358	0.042	0.958

تمرين للتطبيق المطلوب إنشاء جدول الحياة مستخدماً البيانات التالية :

X	l_x	d_x	q_x	p_x
20				0.9929
21	99290			
22			0.0081	
23	97737			
24				0.9909
25	96015			
26	95093			

توقع الحياة

توقع الحياة : هو متوسط عدد السنوات التى يمكن أن يعيشها شخص عمره الآن (X) .

وهناك نوعان من توقع الحياة كما يلى :

- توقع الحياة الناقص
- توقع الحياة الكامل

① توقع الحياة الناقص (e_x) :

هو متوسط عدد السنوات الصحيحة أو الكاملة المتوقع أن يعيشها مستقبلاً أشخاص عمرهم الآن (X) ، مع إهمال كسور السنة .

حيث أن :

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \text{حتى آخر الجدول}}{l_x}$$

② توقع الحياة الكامل (e_x°) :

هو متوسط عدد السنوات الصحيحة أو الكاملة بالإضافة إلى كسور السنة المتوقع أن يعيشها أشخاص عمرهم الآن (X).

حيث أن :

$$e_x^\circ = e_x + 0.5$$

ملاحظات هامة :

١) إذا حدثت الوفاة أول كل سنة $e_x = e_x$

٢) إذا حدثت الوفاة منتصف كل سنة $e_x = e_x + 0.5$

٣) إذا حدثت الوفاة آخر كل سنة $e_x = e_x + 1$

تمرين (٥) أكمل بيانات الجدول التالى :

X	l_x	d_x	q_x	p_x	e_x	e_x°
95	6942					
96	4368					
97	2614					
98	1476					
99	778					

الفرقة الثانية

حل تمرين (٥)

■ **نكمل الجدول كما يلى :**

عمود $\Leftarrow$ d_x $\Leftarrow$ $d_x = l_x - l_{x+1}$

$d_{95} = l_{95} - l_{96} = 6942 - 4368 = 2574$

$d_{96} = l_{96} - l_{97} = 4368 - 2614 = 1754$

$d_{97} = l_{97} - l_{98} = 2614 - 1476 = 1138$

$d_{98} = l_{98} - l_{99} = 1476 - 778 = 698$

عمود $\Leftarrow$ p_x $\Leftarrow$ $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$

$p_{95} = \frac{l_{96}}{l_{95}} = \frac{4368}{6942} = 0.6292$

$p_{96} = \frac{l_{97}}{l_{96}} = \frac{2614}{4368} = 0.5984$

$p_{97} = \frac{l_{98}}{l_{97}} = \frac{1476}{2614} = 0.5647$

$p_{98} = \frac{l_{99}}{l_{98}} = \frac{778}{1476} = 0.5271$

عمود $\Leftarrow$ q_x $\Leftarrow$ $q_x = 1 - p_x$

$q_{95} = 1 - p_{95} = 1 - 0.6292 = 0.3708$

$q_{96} = 1 - p_{96} = 1 - 0.5984 = 0.4016$

$q_{97} = 1 - p_{97} = 1 - 0.5647 = 0.4353$

$q_{98} = 1 - p_{98} = 1 - 0.5271 = 0.4729$

عمود $\Leftarrow$ e_x

$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \text{حتى آخر الجدول}}{l_x}$

$e_{95} = \frac{l_{96} + l_{97} + l_{98} + l_{99}}{l_{95}} = 1.3305$

$e_{96} = \frac{l_{97} + l_{98} + l_{99}}{l_{96}} = 1.1145$

$e_{97} = \frac{l_{98} + l_{99}}{l_{97}} = 0.8623$

$e_{98} = \frac{l_{99}}{l_{98}} = 0.5271$

عمود $\Leftarrow$ e_x° $\Leftarrow$ $e_x^\circ = e_x + 0.5$

$e^\circ_{95} = e_{95} + 0.5 = 1.3305 + 0.5 = 1.8305$

$e^\circ_{96} = e_{96} + 0.5 = 1.1145 + 0.5 = 1.6145$

$e^\circ_{97} = e_{97} + 0.5 = 0.8623 + 0.5 = 1.3623$

$e^\circ_{98} = e_{98} + 0.5 = 0.5271 + 0.5 = 1.0271$

■ **فيكون الجدول كما يلى :**

x	l_x	d_x	q_x	p_x	e_x	e_x°
95	6942	2574	0.3708	0.6292	1.8305	1.8305
96	4368	1754	0.4016	0.5984	1.1145	1.6145
97	2614	1138	0.4353	0.5647	0.8623	1.3623
98	1476	698	0.4729	0.5271	0.5271	1.0271
99	778	---	---	---	---	---

تمرين (٦) من بيانات الجدول التالى :

x	100	101	102	103
l_x	376	162	56	10

أحسب توقع الحياة للعمر 100 سنة على فرض أن :

١) الوفاة تحدث أول كل سنة .

٢) الوفاة تحدث منتصف كل سنة .

٣) الوفاة تحدث أخر كل سنة .

حل تمرين (٦)

١) توقع الحياة إذا حدثت الوفاة أول كل سنة :

$e_{100} = \frac{l_{101} + l_{102} + l_{103}}{l_{100}} = \frac{162 + 56 + 10}{376} = 0.606$

٢) توقع الحياة إذا حدثت الوفاة منتصف كل سنة :

$e_{100} = e_{100} + 0.5 = 0.606 - 0.5 = 1.106$

٣) توقع الحياة إذا حدثت الوفاة أخر كل سنة :

$e_{100} = e_{100} + 1 = 0.606 - 1 = 1.606$

تمرين (٧) إذا علمت أن :

$I_{38} = 954696$	$I_{39} = 952110$
$I_{40} = 949386$	$e^{\circ}_{40} = 32.45$

أحسب قيمة : e°_{38} e°_{39}

حل تمرين (٧)

$\because e^{\circ}_{40} = e_{40} + 0.5$

$\therefore e_{40} = e^{\circ}_{40} - 0.5 = 32.45 - 0.5 = 31.95$

$\because e_{40} = \dfrac{I_{41} + I_{42} + \text{حتى أخر الجدول}}{I_{40}}$

$\therefore I_{41} + I_{42} + \text{حتى أخر الجدول} = e_{40} \times I_{40}$

$\therefore I_{41} + I_{42} + \text{حتى أخر الجدول} = 31.95 \times 949386$

$\therefore I_{41} + I_{42} + \text{حتى أخر الجدول} = 30332883$

$\because e_{39} = \dfrac{I_{40} + I_{41} + I_{42} + \text{حتى أخر الجدول}}{I_{39}}$

$\therefore e_{39} = \dfrac{949386 + 30332883}{952110} = 32.86$

$\therefore e^{\circ}_{39} = e_{39} + 0.5 = 32.86 + 0.5 = 33.36$

$\because e_{38} = \dfrac{I_{39} + I_{40} + I_{41} + I_{42} + \text{حتى أخر الجدول}}{I_{38}}$

$\therefore e_{38} = \dfrac{952110 + 949386 + 30332883}{954696} = 33.76$

$\therefore e^{\circ}_{38} = e_{38} + 0.5 = 33.76 + 0.5 = 34.26$

تمرين للتطبيق إذا علمت أن :

$I_{12} = 98872$	$I_{23} = 97874$
$I_{24} = 96738$	$e^{\circ}_{24} = 30.53$

أحسب قيمة : e°_{12} e°_{23}

احتمالات الحياة (الوفاة)

احتمالات الحياة والوفاة لشخص واحد فقط

1) p_x احتمال أن شخص يبلغ تمام العمر (X) يعيش لمدة سنة حتى بلوغه تمام العمر (X+1) .

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$$

2) ${}^n p_x$ احتمال أن شخص يبلغ تمام العمر (X) يعيش لمدة (n) من السنوات حتى بلوغه تمام العمر (X+n) .

$${}^n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}^n q_x$$

3) q_x احتمال أن شخص يبلغ تمام العمر (X) يموت خلال سنة قبل بلوغه تمام العمر (X+1) .

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$$

4) ${}^n q_x$ احتمال أن شخص يبلغ تمام العمر (X) يموت خلال (n) سنة قبل بلوغه تمام العمر (X+n) .

$${}^n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}^n p_x$$

5) ${}^m/q_x$ احتمال أن شخص فى تمام العمر (X) يموت بين العمر (X+m) والعمر (X+m+1) .

$${}^m/q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} = {}^m p_x - {}^{m+1} p_x$$

6) ${}^m/{}^n q_x$ احتمال أن شخص فى تمام العمر (X) يموت بين العمر (X+m) والعمر (X+m−n) .

$${}^m/{}^n q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x}$$

$${}^m/{}^n q_x = {}^m p_x - {}^{m+n} p_x$$

احتمالات الحياة والوفاة لأكثر من شخص

يعتمد حساب احتمالات الحياة والوفاة لأكثر من شخص على نظرية الاحتمالات فى حالة الاستقلال ، حيث أن :

أو	⇐	+	و	⇐	×
تعنى جمع الاحتمالات			تعنى ضرب الاحتمالات	

ملاحظات :

1) احتمال حياة شخص واحد على الأقل

= ١ - احتمال وفاة الاشخاص معاً

2) احتمال وفاة شخص واحد على الأقل

= ١ - احتمال حياة الاشخاص معاً

تمرين (١) اكتب الصيغة الرياضية لكل دالة من الدوال التالية :

p_{40} q_{30} ${}^{10}p_{30}$ ${}^{20}q_{30}$ ${}^{15}/q_{40}$ ${}^{16}/{}^{4}q_{30}$

حل تمرين (١)

① $p_{40} = \frac{l_{41}}{l_{40}} = 1 - p_{40}$

② $q_{30} = \frac{d_{30}}{l_{30}} = \frac{l_{40} - l_{41}}{l_{30}} = 1 - p_{30}$

③ ${}^{10}p_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}} = 1 - {}^{10}q_{30}$

④ ${}^{20}q_{30} = \frac{l_{30} - l_{50}}{l_{30}} = 1 - {}^{20}p_{30}$

⑤ ${}^{15}/q_{40} = \frac{d_{55}}{l_{40}} = \frac{l_{45} - l_{46}}{l_{40}} = {}^{15}p_{40} - {}^{16}p_{40}$

⑥ ${}^{16}/{}^{4}q_{30} = \frac{l_{46} - l_{50}}{l_{30}} = {}^{16}p_{30} - {}^{20}p_{30}$

تمرين (٢) مستخدماً البيانات التالية :

X	70	71	72	73	74	75
l_x	5593	5314	5027	4731	4432	4130

المطلوب : أحسب كل مما يلى :

$$p_{70} \quad q_{72} \quad {}^{3}p_{70} \quad {}^{2}q_{71} \quad {}^{3}/q_{70} \quad {}^{3}/{}^{2}q_{70}$$

حل تمرين (٢)

① $p_{70} = \frac{l_{71}}{l_{70}} = \frac{5314}{5593} = 0.9501$

② $q_{72} = \frac{l_{72} - l_{73}}{l_{72}} = \frac{5027 - 4731}{5027} = 0.0589$

③ ${}^{3}p_{70} = \frac{l_{73}}{l_{70}} = \frac{4731}{5593} = 0.8459$

④ ${}^{2}q_{71} = \frac{l_{71} - l_{73}}{l_{71}} = \frac{5314 - 4731}{5314} = 0.1097$

⑤ ${}^{3}/q_{70} = \frac{l_{73} - l_{74}}{l_{70}} = \frac{4731 - 4432}{5593} = 0.0535$

⑥ ${}^{3}/{}^{2}q_{70} = \frac{l_{73} - l_{75}}{l_{70}} = \frac{4731 - 4130}{5593} = 0.1075$

تمرين (٣) أكمل جدول الحياة التالى :

X	l_x	d_x	q_x	p_x
20	100000	250		
21				0.9912
22		998		
23			0.0116	
24				0.9846
25				

المطلوب : أحسب كل مما يلى :

1) احتمال أن شخص فى تمام العمر 20 يعيش حتى يبلغ تمام العمر 25 .

2) احتمال أن شخص فى تمام العمر 20 يموت خلال الخمس سنوات التالية .

3) احتمال أن شخص فى تمام العمر 20 يموت بين تمام العمر 24 وتمام العمر 25 .

4) احتمال أن شخص فى تمام العمر 20 يموت أثناء السنة الرابعة والعشرين من عمره .

5) احتمال أن شخص فى تمام العمر 21 يموت بين تمام العمر 23 وتمام العمر 25 .

6) احتمال حياة شخص عمره 21 سنة لمدة 3 سنوات ثم وفاته خلال السنة التالية مباشرة .

حل تمرين (٣)

■ نكمل الجدول كما يلى :

$I_{21} = I_{20} - d_{20} = 10000 - 250 = 99750$

$p_{20} = \frac{I_{21}}{I_{20}} = \frac{99750}{10000} = 0.9975$

$q_{20} = 1 - p_{20} = 1 - 0.9975 = 0.0025$

$I_{22} = I_{21} \cdot p_{21} = 99750 \times 0.9912 = 98872$

$d_{21} = I_{21} - I_{22} = 99750 - 98872 = 878$

$q_{21} = 1 - p_{21} = 1 - 0.9912 = 0.0088$

$I_{23} = I_{22} - d_{22} = 98872 - 998 = 97874$

$p_{22} = \frac{I_{23}}{I_{22}} = \frac{97874}{98872} = 0.9899$

$q_{22} = 1 - p_{22} = 1 - 0.9899 = 0.0101$

$d_{23} = I_{23} \cdot q_{23} = 97874 \times 0.0116 = 1135$

$p_{23} = 1 - q_{23} = 1 - 0.0116 = 0.9884$

$q_{24} = 1 - p_{22} = 1 - 0.9846 = 0.0154$

$I_{24} = I_{23} \cdot p_{23} = 97874 \times 0.9846 = 96739$

$d_{24} = I_{24} \cdot q_{24} = 96739 \times 0.0154 = 1490$

$I_{25} = I_{24} - d_{24} = 96739 - 1490 = 95249$

■ فيكون الجدول كما يلى :

X	I_x	d_x	q_x	p_x
20	100000	250	0.0025	0.9975
21	99750	878	0.0088	0.9912
22	98872	998	0.0101	0.9899
23	97874	1135	0.0116	0.9884
24	96739	1490	0.0154	0.9846
25	95249	---	---	---

الاحتمال الأول :

$$^{5}p_{20} = \frac{I_{25}}{I_{20}} = \frac{95249}{100000} = 0.95249$$

الاحتمال الثاني :

$$^{5}q_{20} = \frac{I_{20} - I_{25}}{I_{20}} = \frac{100000 - 95249}{100000} = 0.04751$$

حل أخر :

$$^{5}q_{20} = 1 - {}^{5}p_{20} = 1 - 0.95249 = 0.04751$$

الاحتمال الثالث :

$$^{4}/q_{20} = \frac{I_{24} - I_{25}}{I_{20}} = \frac{96739 - 95249}{100000} = 0.01490$$

الاحتمال الرابع :

$$^{3}/q_{20} = \frac{I_{23} - I_{24}}{I_{20}} = \frac{97874 - 96739}{100000} = 0.01135$$

الاحتمال الخامس :

$$^{2}/^{2}q_{21} = \frac{I_{23} - I_{25}}{I_{21}} = \frac{97874 - 95249}{99750} = 0.02632$$

الاحتمال السادس :

$$^{3}/q_{21} = \frac{I_{24} - I_{25}}{I_{21}} = \frac{96739 - 95249}{99750} = 0.01494$$

تمرين (٤) إذا كانت : $I_x = \sqrt{160 - x}$

المطلوب :

1) احتمال أن شخص عمره 16 يموت قبل بلوغه العمر 60 .

2) أوجد قيمة $^{23}/^{21}q_{16}$

حل تمرين (٤)

الاحتمال الأول :

$$^{44}q_{16} = \frac{I_{16} - I_{60}}{I_{16}} = \frac{12 - 10}{12} = 0.1667$$

حيث أن :

$$I_{16} = \sqrt{160 - 16} = 12 \qquad I_{60} = \sqrt{160 - 60} = 10$$

الاحتمال الثاني :

$$^{23}/^{21}q_{16} = \frac{I_{39} - I_{60}}{I_{16}} = \frac{11 - 10}{12} = 0.0833$$

حيث أن :

$$I_{39} = \sqrt{160 - 39} = 11$$

تمرين (٥) بفرض أنه تم إنشاء جدول الحياة وفقاً لحالة البقاء التالية :

$$I_x = 100\sqrt{64 - x}$$

المطلوب : أحسب كل مما يلي :

1) احتمال حياة شخص من يوم مولده وحتى تمام العمر 28

2) احتمال وفاة مولود قبل بلوغه تمام العمر 28

حل تمرين (٥)

الاحتمال الأول :

$$^{28}p_0 = \frac{I_{28}}{I_0} = \frac{600}{800} = 0.75$$

حيث أن :

$$I_0 = 100\sqrt{64 - 0} = 800$$

$$I_{28} = 100\sqrt{64 - 28} = 600$$

الاحتمال الثاني :

$$^{28}q_0 = 1 - {}^{28}p_0 = 1 - 0.75 = 0.25$$

تمرين (٦) إذا كان (A,B) شخصان الأول فى تمام العمر 30 سنة والثانى فى تمام العمر 35 سنة :

باستخدام البيانات التالية :

X	30	35	40	45
l_x	178084	176443	174315	171212

المطلوب : أحسب الاحتمالات التالية :

1) حياة الشخصين معاً لمدة 10 سنوات .
2) وفاة الشخصين معاً خلال 10 سنوات .
3) حياة (A) لمدة 10 سنوات ووفاة (B) خلال نفس المدة .
4) حياة (B) لمدة 10 سنوات ووفاة (A) خلال نفس المدة .
5) احتمال حياة واحد فقط لمدة 10 سنوات .
6) احتمال وفاة واحد فقط خلال 10 سنوات .
7) احتمال وفاة واحد على الأقل خلال 10 سنوات .
8) احتمال حياة واحد على الأقل لمدة 10 سنوات .

حل تمرين (٦)

الشخص (B)	الشخص (A)
$^{10}p_{35} = \frac{l_{45}}{l_{35}}$	$^{10}p_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}}$
$^{10}p_{35} = \frac{171212}{176443}$	$^{10}p_{30} = \frac{174315}{178084}$
$^{10}p_{35} = 0.97035$	$^{10}p_{30} = 0.97884$
$^{10}q_{35} = 1 - {}^{10}p_{35}$	$^{10}q_{30} = 1 - {}^{10}p_{30}$
$^{10}q_{35} = 1 - 0.97035$	$^{10}q_{30} = 1 - 0.95249$
$^{10}q_{35} = 0.02965$	$^{10}q_{30} = 0.02116$

الاحتمال الأول :

$$= {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}p_{35}$$
$$= 0.97884 \times 0.97035 = 0.94982$$

الاحتمال الثانى :

$$= {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}q_{35}$$
$$= 0.02116 \times 0.02965 = 0.00063$$

الاحتمال الثالث :

$$= {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}q_{35}$$
$$= 0.97884 \times 0.02965 = 0.02902$$

الاحتمال الرابع :

$$= {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}p_{35}$$
$$= 0.02116 \times 0.97035 = 0.02053$$

الاحتمال الخامس :

$$= {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}q_{35} + {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}p_{35}$$
$$= 0.02902 \times 0.02053 = 0.00060$$

الاحتمال السادس :

$$= {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}p_{35} + {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}q_{35}$$
$$= 0.02053 \times 0.02902 = 0.00060$$

الاحتمال السابع :

$$= 1 - [{}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}p_{35}]$$
$$= 1 - [0.97884 \times 0.97035] = 0.05018$$

الاحتمال الثامن :

$$= 1 - [{}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}q_{35}]$$
$$= 1 - [0.02116 \times 0.02965] = 0.99937$$

تمرين (٧) إذا علمت أن الشخص (A) يبلغ تمام العمر 20 وكان احتمال حياته لمدة عشر سنوات هو 0.8 ، وشخص آخر (B) يبلغ تمام العمر 25 وكان احتمال حياته لمدة عشر سنوات هو 0.9 . أحسب الاحتمالات التالية :

1) احتمال حياة الشخصين معاً لمدة 10 سنوات .
2) احتمال وفاة الشخصين معاً خلال 10 سنوات .
3) احتمال وفاة أحد الشخصين خلال 10 سنوات .
4) احتمال وفاة أحد الشخصين على الأقل خلال 10 سنوات .
5) احتمال حياة أحد الشخصين خلال 10 سنوات .
6) احتمال حياة أحد الشخصين على الأقل خلال 10 سنوات .

حل تمرين (٧)

الشخص	العمر	احتمال حياته لمدة 10 سنوات	احتمال وفاته خلال 10 سنوات
A	30	${}^{10}p_{30} = 0.8$	${}^{10}q_{30} = 0.2$
B	25	${}^{10}p_{25} = 0.9$	${}^{10}q_{25} = 0.1$

الاحتمال الاول :

$= {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}p_{25} = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

االاحتمال الثاني :

$= {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}q_{25} = 0.2 \times 0.1 = 0.02$

الاحتمال الثالث :

$= {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}p_{25} + {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}q_{25}$

$= 0.2 \times 0.9 + 0.8 \times 0.1 = 0.18 \times 0.08 = 0.26$

الاحتمال الرابع :

$= 1 - [{}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}p_{25}] = 1 - [0.8 \times 0.9] = 0.28$

الاحتمال الخامس :

$= {}^{10}p_{30} \cdot {}^{10}q_{25} + {}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}p_{25}$

$= 0.8 \times 0.1 + 0.9 \times 0.2 = 0.08 \times 0.18 = 0.26$

الاحتمال السادس :

$= 1 - [{}^{10}q_{30} \cdot {}^{10}q_{25}] = 1 - [0.2 \times 0.1] = 0.98$

تمارين للتطبيق

تمرين (١) اكتب الرمز الدال على الاحتمالات التالية :

1. احتمال أن شخص فى تمام العمر 25 يعيش ليبلغ تمام العمر 40

A) ${}^{15}q_{25}$ B) p_{25} C) ${}^{15}p_{25}$ D) ${}^{4}/p_{25}$

2. احتمال وفاة شخص فى تمام العمر 40 فى العام السبعين من عمره .

A) ${}^{29}p_{40}$ B) ${}^{29}q_{40}$ C) ${}^{29}/q_{40}$ D) ${}^{29}/p_{40}$

3. احتمال وفاة شخص عدره 22 سنة خلال خمس سنوات

A) ${}^{5}q_{22}$ D) ${}^{5}/p_{22}$ C) ${}^{5}p_{22}$ D) ${}^{5}/q_{22}$

4. احتمال حياة شخص عمره 30 سنة لمدة عشر سنوات ثم وفاته فى السنة التالية مباشرة

A) ${}^{10}p_{30}$ B) ${}^{10}q_{30}$ C) ${}^{10}/q_{30}$ D) ${}^{10}/p_{30}$

تمرين (٢) إذا توافرت لديك البيانات التالية :

X	45	46	47	48	49	50
l_x	171212	170433	169594	168692	167724	166682

1. احتمال حياة شخص عمره 45 لمدة خمس سنوات

A) 0.923769 B) 0.973542

C) 0.998521 D) خلاف ما سبق

2. احتمال أن شخص عمره 45 سنة يموت خلال سنتين من بلوغه العمر 47 .

A) 0.010922 B) 0.057583

C) 0.056421 D) خلاف ما سبق

3. قيمة d_{48}

A) 839 B) 968

C) 902 D) خلاف ما سبق

تمرين (٣) إذا توافرت لديك البيانات التالية :

X	30	31	32	33	34	35
l_x	178084	177716	177460	177135	176797	176443

1. احتمال أن شخص عمره 30 سنة يعيش خمس سنوات

A) 0.990785 B) 0.970745

C) 0.549309 D) خلاف ما سبق

2. احتمال وفاة شخص عمره 30 سنة بين العمر 34 والعمر 35 .

A) 0.02345 B) 0.001988

C) 0.005723 D) خلاف ما سبق

3. قيمة d_{32}

A) 325 B) 336

C) 383 D) خلاف ما سبق

تمرين (1) إذا علمت أن الشخص (A) يبلغ تمام العمر 30 وكان احتمال حياته لمدة عشر سنوات هو 0.7 ، وشخص آخر (B) يبلغ تمام العمر 35 وكان احتمال حياته لمدة عشر سنوات هو 0.8 .

المطلوب : أحسب الاحتمالات التالية :

1) حياة الشخصين معاً لمدة 10 سنوات .

2) وفاة الشخصين معاً خلال 10 سنوات .

3) وفاة أحد الشخصين خلال 10 سنوات .

4) وفاة أحد الشخصين على الأقل خلال 10 سنوات .

5) حياة أحد الشخصين خلال 10 سنوات .

6) حياة أحد الشخصين على الأقل خلال 10 سنوات .

تمرين (2) أكمل جدول الحياة التالي :

x	l_x	d_x	q_x	p_x
20				0.99170
21	99700			
22			0.00101	
23	99592			
24				0.99919
25	99475			
26	99413			

المطلوب : أحسب كل مما يلي :

- احتمال أن شخص في تمام العمر 21 سنة يموت في السنة الخامسة والعشرين من عمره

A) 0.00111 B) 0.00152
C) 0.00121 D) 0.00138

- احتمال أن شخص في تمام العمر 20 سنة يموت بين تمام العمر 22 سنة والعمر 28 سنة

A) 0.00345 B) 0.00694
C) 0.00755 D) 0.00865

- احتمال أن شخص في تمام العمر 21 سنة يموت قبل بلوغه تمام العمر 26 سنة

A) 0.07561 B) 0.03906
C) 0.04227 D) 0.02524

- احتمال أن شخص في تمام العمر 20 سنة لا يموت بين تمام العمر 22 سنة والعمر 28 سنة

A) 0.96558 B) 0.97894
C) 0.95755 D) 0.93865