CARVEN

احصاء

اعداد

د/ سلمى أيمن

العزوم: مركزية، لامركزية.

اللامركزية: أي العزوم المحسوبة حول نقطة الصفر ← تستخدم العزوم لوصف خصائص توزيع البيانات مثل ..... والالتواء والتفلطح.

$$\grave{M}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r \, , i = 1,2,3,\dots,n \, , r = 1,2,3,\dots\dots, \forall$$

$\grave{M}_r$ ← ترمز للعزم اللامركزي حول الصفر ذو الترتيب r ؛ إذا كانت $1r$ يسمى العزم الأول (الوسط الحساس)، إذا كانت $2r$ يسمى العزم الثاني

n ← حجم العينة، عدد القيم

$\sum$ ← مجموع القيم الناتجة

i ← دليل المشاهدة زي عداد يبدأ من (1) وينتهي عند n ليضمن مرورك بكل القيم الأولى والثانية والثالثة وهكذا.

X_i ← تمثل قيمة المشاهدة رقم i مثال: X_1 القيمة الأولى في البيانات

X_2 القيمة الثانية في البيانات

X_3 القيمة الثالثة في البيانات

r ← رتبة العزم (الأس الذي ترفع له القيم) ← (دليل العزم اللامركزي للقيمة حول الصفر)

لحساب العزم الأول نرفع القيم لأس 1، لحساب العزم الثاني نرفع القيم لأس2 وهكذا.

$(\forall)$ ← آخر عزم لامركزي حول الصفر.

$\grave{M}_1$ ← العزم الأول اللامركزي للعينة العشوائية. $\grave{M}_2$ ← العزم الثاني اللامركزي للعينة العشوائية.

$\grave{M}_3$ ← العزم الثالث اللامركزي للعينة العشوائية. $\grave{M}_4$ ← العزم الرابع اللامركزي للعينة العشوائية.

ويتم تقدير العزوم الأربعة الأولى اللامركزية حول الصفر بالقانون.

مثال: احسب العزوم الأربع الأولى حول الصفر 7,9,11,10,13

$$\grave{M}_1 = \frac{1}{n}\sum X_i = \bar{X} \text{ (الوسط الحسابي)}$$

$$\grave{M}_2 = \frac{1}{n}\sum (X_i)^2 \qquad \grave{M}_3 = \frac{1}{n}(X_i)^3 \qquad \grave{M}_4 = \frac{1}{n}\sum (X_i)^4$$

لحساب العزوم الأربع الأولى اللامركزية ننشئ الجدول:

i	X_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4
1	7	49	343	2401
2	9	81	729	6561
3	11	121	1331	14641
4	10	100	1000	10000
5	13	169	2197	28561
Sum	50	520	5600	62164

$$\grave{M}_1 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i = \frac{50}{5} = 10$$

$$\grave{M}_2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(X_i)^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{n} = \frac{520}{5} = 104$$

$$\grave{M}_3 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(X_i)^3 = \frac{X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_5^3}{n} = \frac{5600}{5} = 1126$$

$$\grave{M}_4 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(X_i)^4 = 12432.8$$

إذا كانت البيانات مبوبة:

$$\grave{M}_r = \frac{\sum f_i M_i^r}{\sum f_i}, i = 1,2,3,\dots.,k, r = 1,2,3,\dots\dots,V$$

i ← دليل العينات
k ← آخر فئة بالجدول
F_i ← تكرار الفئة i
M_i ← مركز الفئة i مرفوع لأس r
r ← دليل العزم رقم r
V ← رقم آخر عزم لامركزي

العزوم الأربعة:

$$\grave{M}_1 = \frac{\sum f_i M_i}{\sum f_i} = \bar{X} \qquad \grave{M}_2 = \frac{\sum f_i M_i^2}{\sum f_i} \qquad \grave{M}_3 = \frac{\sum f_i M_i^3}{\sum f_i} \qquad \grave{M}_4 = \frac{\sum f_i M_i^4}{\sum f_i}$$

احسب العزوم الأربع اللامركزية:

الفئات	-0	-2	-4	-6	-8	10	Sum
التكرار	8	15	22	35	18	2	100

الحل:

الفئات	F_i	M_i	F_iM_i	$F_iM_i^2$	$F_iM_i^3$	$F_iM_i^4$
0-	8	1	8	8	8	8
2-	15	3	45	135	405	1215
4-	22	5	110	550	2750	13750
6-	35	7	245	1715	12005	84035
8-	18	9	162	1458	13122	118098
10-	2	11	22	242	2662	29282
sum	100		592	4108	30952	246388

$$\grave{M}_1 = \frac{\sum f_i M_i}{\sum f_i} = \frac{592}{100} = 5.92 \qquad \grave{M}_2 = \frac{\sum f_i M_i^2}{\sum f_i} = 41.08 \qquad \grave{M}_3 = 309.52 \qquad \grave{M}_4 = 2463.88$$

CARVEN

ثانيا: تقدير العزوم حول الوسط الحسابي لعينة عشوائية بسيطة مبوبة، غير مبوبة ×

يتم تقدير العزوم المركزية من بيانات عينة عشوائية بسيطة حول وسطها الحسابي بالقانون:

$$M_r = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \sum_{i=r}^{k} f_i (M_i - \bar{X})^r \, , i = 1, 2, \dots\dots, k, r = 1, 2, \dots\dots\dots, V$$

M_r ← العزم المركزي حول الوسط الحسابي لعينة عشوائية بسيطة.

M_i ← مركز الفئة رقم i $\quad$ f_i ← تكرار الفئة رقم i $\quad$ i ← دليل الفئات

r ← دليل العزم رقم r $\quad$ k ← آخر فئة بالجدول $\quad$ $\bar{X}$ ← الوسط الحسابي للعينة

V ← رقم آخر عزم مركزي

مثال: من التوزيع المركزي التالي احسب العزوم المركزية الأربع حول الوسط الحسابي:

العينات	4 –	8 –	12 –	16 –	20 – 40	sum
F	8	12	25	20	10	75

الحل:

$$\bar{X} = \frac{1}{\sum F_i} \sum F_i M_i = \frac{1098}{75} = 14{,}64$$

$$M_1 = \frac{1}{\sum F_i} \sum F_i (M_i - 14.64) = 0$$

(العزم المركزي الأول دائما = صفر)

$$M_2 = \frac{1}{\sum F_i} \sum F_i (M_i - 14.64)^2 = \frac{1633.28}{75} = 21.777$$

$$M_3 = \frac{1}{\sum F_i} \sum F_i (M_i - 14.64)^3 = -21.59$$

$$M_4 = \frac{1}{\sum F_i} \sum F_i (M_i - 14.64)^4 = 1093.9$$

الفئات	F_i	M_i	$F_i M_i$	$(M_i - 14.64)$	$F_i(M_i - 14.64)$	$F_i(M_i - 14.64)^2$	$F_i(M_i - 14.64)^3$	$F_i(M_i - 14.64)^4$
4 –	8	6	48	−8.64	−69.12	597.1968	−5159,7803	44580.5
8 –	12	10	120	−4.64	−55.68	258.3552	−1198.7681	5562.3
12 –	25	14	350	−0.64	−16	10.24	−6.5536	4.2
16 –	20	18	360	3.36	67.2	225.792	758.6611	2549.1
20 – 24	10	22	220	7.36	73.6	541.696	3986.8826	29343.5
sum	75		1098			1633.28	−1619.5583	82039.6

CARVEN

العلاقة بين العزوم المركزية واللامركزية ← العلاقة بين العزوم حول الوسط الحسابي والعزوم حول الصفر.

احسب العزوم المركزية بدلالة العزوم اللامركزية للبيانات: 4, 2, 6, 3, 10

الحل:

أولا: نحسب العزوم اللامركزية:

i	X_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4
1	4	16	64	256
2	2	4	8	16
3	6	36	216	1296
4	3	9	27	81
5	10	100	1000	10000
Sum	25	165	1315	11649

$$M_1' = \frac{25}{5} = 5, \qquad M_2' = \frac{165}{5} = 33$$

$$M_1 = 0 \text{ (دائمًا)}, \qquad M_2 = M_2' - (M_1')^2 = 33 - (5)^2 = 8$$

عرض النتائج:

$$M_1 = 0 \qquad M_1' = 5$$
$$M_2 = 8 \qquad M_2' = 33$$

ملاحظة: العزوم الزوجية الرتبة سواء مركزية أو لامركزية تكون غير سالبة دائمًا، العزوم الفردية الرتبة قد تكون سالبة أو موجبة أو صفرية.

الالتواء:

الوسط = الوسيط = المنوال ∴ المنحنى متماثل $\bar{X} = M_d = M_0$

ملتوي جهة اليمين ← موجب الالتواء $\bar{X} > M_d > M_0$

ملتوي جهة اليسار ← سالب الالتواء $\bar{X} < M_d < M_0$

ويمكن الاستدلال جبريًا على وجود الالتواء ضربًا من العلاقة

الوسط الحسابي – المنوال = 3(الوسط الحسابي – الوسيط)

$$\bar{X} - M_0 = 3(\bar{X} - M_d)$$

معامل التواء العزوم:

$$\beta_1 = \frac{M_3^2}{M_2^3} = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}}$$

M_3 ← العزم المركزي الثالث

M_2 ← العزم المركزي الثاني

التفرطح:

مثلًا وجدنا $M_4 = 87.93$ $M_2 = 6.03$

حيث إن

$$\beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2} = \frac{87.93}{(6.03)^2} = 2.14 < 3$$

∴ التوزيع مفرطحًا

طب لو = 3 ← التوزيع طبيعي، طب لو أكبر من 3 ← التوزيع مريب.

CARVEN